

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



Facoltà d'Ingegneria

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Tesi di laurea

Analisi della dinamica di veicoli con differenziale bloccato

Candidato

Matteo Galoppini

Relatori:

Prof. Ing. Massimo Guiggiani

Dott. Ing. Francesco Frendo

3 maggio 2004

Archivio tesi corso di laurea in ingegneria meccanica 34/04

Anno accademico 2002/2003

Consultazione consentita

Titolo della tesi

Analisi della dinamica di veicoli con differenziale bloccato

di

Matteo Galoppini

Tesi proposta per il conseguimento del

titolo accademico di

DOTTORE IN INGEGNERIA MECCANICA

presso la

Facoltà di Ingegneria

della

Università degli studi di Pisa

3 Maggio 2004

Autore:

Matteo Galoppini.....

Approvata da:

Prof. Ing. Massimo Guiggiani.....

Dott. Ing. Francesco Frendo.....

Introduzione

L'oggetto di questo lavoro è l'analisi del comportamento dinamico di autoveicoli con differenziale bloccato, in condizioni di regime.

In passato erano stati svolti studi analoghi, solo per karts da competizione, che, oltre ad essere caratterizzati dall'assenza di sospensioni elastiche, presentano masse ed inerzie molto differenti rispetto ai normali veicoli, con problematiche e soluzioni costruttive diverse. In questa trattazione sono stati valutati, in particolare, due aspetti: il primo è relativo alla nascita di un nuovo contributo, M_{z2} , al momento d'imbardata, che deriva dal differente valore assunto dalle forze longitudinali delle ruote motrici, a seguito del bloccaggio del differenziale, mentre il secondo riguarda l'influenza che ha sull'analisi, il fatto di aver considerato, sempre alle ruote motrici, la presenza di piccoli slittamenti longitudinali. Nel caso in cui il differenziale fosse stato libero, non vi sarebbe mai stato il contributo M_{z2} , in quanto, in ogni condizione di moto, le forze longitudinali, scambiate tra le ruote e la strada, sarebbero state uguali, così che le forze laterali sarebbero state le uniche responsabili del momento d'imbardata.

L'analisi del comportamento dinamico del veicolo con differenziale bloccato, è svolta attraverso l'uso di due modelli matematici, che si differenzieranno per il tipo di pneumatico utilizzato. In particolare il primo si avvale di un'equazione costitutiva lineare, dove ciascuna forza, scambiata a terra dal pneumatico, è una funzione lineare del relativo scorrimento teorico, mentre il secondo modello è caratterizzato da un'equazione costitutiva non lineare, definita attraverso l'uso della Magic Formula di Pacejka.

L'obiettivo di questo lavoro è, quindi, analizzare la dinamica del veicolo con differenziale bloccato, in condizioni di regime, valutando gli andamenti delle varie grandezze caratteristiche (forze tangenziali, angolo di assetto etc.) durante l'evoluzione del moto. Per poter far questo, l'analisi è stata condotta valutando il comportamento del veicolo durante le tre manovre classiche $u = cost$, $\delta = cost$, $R = cost$, le quali hanno la peculiarità di evidenziare gli stessi fenomeni, caratteristici del modello adottato,

permettendo, però, di eseguire un'analisi di quest'ultimi, da punti di vista differenti.

Indice

1	Definizione del modello	7
1.1	Ipotesi semplificative	7
1.2	Modello e grandezze di riferimento	9
1.3	Equazioni di congruenza	11
1.3.1	Definizione dello scorrimento teorico	11
1.3.2	Scorrimento teorico di ciascuna ruota	15
1.4	Equazioni di equilibrio	19
1.4.1	Accelerazioni	19
1.4.2	Forze e momenti agenti sul veicolo	20
1.5	Equazioni costitutive	23
1.6	Modello monotraccia	24
2	Analisi con pneumatico linearizzato	26
2.1	Equazioni costitutive	26
2.1.1	Definizione di k_i	27
2.1.2	Definizione di ΔF_{z_i}	30
2.1.3	Espressione delle equazioni costitutive	32

2.2	Forze sugli assali e momento d'imbardata	33
2.3	Comportamento a regime	35
2.3.1	Nuovo concetto di gradiente di sottosterzo	37
3	Analisi numerica per il caso con pneumatici lineari	40
3.1	Dati utilizzati per l'analisi	41
3.2	Prove sul veicolo	42
3.2.1	Manovra a $u = cost$	42
3.2.2	Manovra a $\delta = cost$	49
3.2.3	Manovra a $R = cost$	55
3.2.4	Andamento della variabile q/u	59
4	Analisi con pneumatico non lineare	67
4.1	Equazioni costitutive	67
5	Analisi numerica per il caso con pneumatici non lineari	73
5.1	Dati utilizzati per l'analisi	73
5.2	Prove sul veicolo	75
5.2.1	Manovra a $u = cost$	75
5.2.2	Manovra a $\delta = cost$	89
5.2.3	Manovra ad $R = cost$	100
5.2.4	Considerazioni sul caso in cui $q/u = 0$	101
6	Conclusioni	106

Capitolo 1

Definizione del modello

Prima di iniziare l'analisi occorre definire, in modo dettagliato, il modello matematico impiegato per lo studio del comportamento dinamico di un veicolo con differenziale bloccato. Per un'analisi preliminare, si utilizzerà un modello di veicolo dotato di pneumatici linearizzati, per passare successivamente ad uno con pneumatici non lineari, capace di fornire risposte più vicine alla realtà fisica dei fenomeni in gioco.

1.1 Ipotesi semplificative

Per poter cominciare la descrizione del modello, si rende necessario specificare le ipotesi semplificative utilizzate per lo sviluppo dello stesso; questo permetterà di conoscerne i limiti di validità ed applicabilità, evitando che possa essere impiegato al di fuori di tali condizioni.

Per prima cosa occorre dire che verrà analizzato il comportamento del veicolo a *regime*, non studiando ciò che accade durante il transitorio, ed analizzando il moto come una successione di *stati di equilibrio*. Questo permetterà una notevole semplificazione nel calcolo, svincolando quest'ultimo dal tempo. Si suppone, inoltre, che il veicolo si muova su strada *piana* ed *orizzontale*, assimilabile, cioè, ad un piano geometrico.

Interessandoci solamente il comportamento direzionale a regime del modello, possiamo considerare la velocità di avanzamento (indicata successivamente con il simbolo u) variabile solo attraverso stati di equilibrio. Questo vuol dire evitare sia brusche accelerazioni che frenature. Anche se il modello si riferisce a veicoli provvisti di sospensioni, si suppone che i moti di beccheggio e di scuotimento della carrozzeria siano trascurabili, ipotizzando quest'ultima come perfettamente rigida. Il moto di rollio è supposto molto piccolo, tale cioè da non poter essere completamente trascurato e da dar origine ad un trasferimento di carico tra le ruote di un assale (il valore del rollio dipenderà dall'accelerazione laterale e dalla rigidità al rollio del veicolo in esame). Conseguenza dell'aver supposto basso il rollio e trascurabili lo scuotimento ed il beccheggio, è che il veicolo assumerà un moto piano, dove ogni punto della carrozzeria avrà la stessa distanza da terra.

Per maggior semplicità nella realizzazione del modello, si considerano sterzanti solamente le ruote anteriori, mentre si ipotizzano motrici le ruote posteriori.

Per quanto riguarda la sterzata possiamo dire che l'angolo di sterzo alle ruote anteriori risulta essere univocamente determinato dalla posizione del volante, benchè la tiranteria dello sterzo ed i braccetti delle sospensioni siano provvisti di una certa elasticità; in tal modo la posizione angolare delle ruote sterzanti risulta assegnata e non costituisce una variabile. Per mantenere piana la cinematica del modello, è stata fatta un'ultima approssimazione, sempre sulle ruote anteriori, ed in particolar modo sull'asse di sterzo, che viene assunto ortogonale alla strada e passante per il centro dell'impronta a terra del pneumatico. Questo ovviamente non è vero, in quanto l'asse di sterzo, nella realtà, è un asse *sghebo*, che genera, a seguito della sua intersezione con il piano stradale, le due distanze caratteristiche, l'*avancorsa* in senso longitudinale ed il *braccio a terra* in senso trasversale, rispetto al centro dell'impronta a terra del pneumatico. Essendo però, queste due grandezze, piccole qualche centimetro è possibile trascurarle nella nostra trattazione e considerare l'asse di sterzo di ciascuna ruota come passante per il centro dell'impronta a terra.

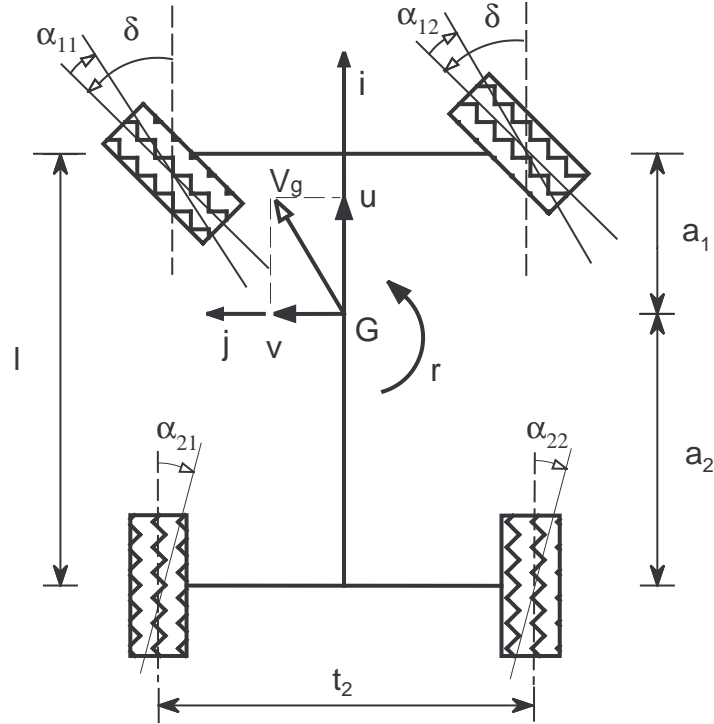


Figura 1.1: modello di veicolo

Quindi, l'effetto complessivo di tutte queste ipotesi, è un modello con tre soli gradi di libertà, dove il veicolo è schematizzato come un *unico corpo rigido in moto piano*.

1.2 Modello e grandezze di riferimento

Per poter definire matematicamente il modello, sulla base anche delle precedenti ipotesi, si rende necessaria una sintetica rappresentazione delle principali grandezze, che verranno richiamate in seguito. Il disegno riportato in Fig 1.1 schematizza un veicolo rigido a 3 gradi di libertà, di massa \mathbf{m} e baricentro in \mathbf{G} . Per poterne definire univocamente il moto, si definisce un sistema di riferimento cartesiano solidale al veicolo (x, y, z, G) di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Gli assi sono così disposti: l'asse x è diretto nella direzione

di avanzamento del veicolo, l'asse y è ortogonale all'asse x e diretto verso la sinistra del veicolo, mentre l'asse z è ortogonale al piano stradale e passante, ovviamente, per il baricentro. In generale questo sistema di riferimento non coincide con la terna centrale d'inerzia, ma se si assume che il veicolo sia simmetrico rispetto al piano medio longitudinale, contenente gli assi x e z , otterremo che almeno l'asse y sia centrale d'inerzia. Da questo discende che i prodotti d'inerzia J_{xy} e J_{yz} si annullino, mentre in generale non sarà nullo il prodotto d'inerzia J_{zx} così come saranno ovviamente diversi da zero i tre momenti d'inerzia J_x , J_y , J_z . Si indica con $\Omega = r\mathbf{k}$ la velocità d'imbardata del veicolo (yaw rate), con \mathbf{k} ortogonale al piano stradale e diretta verso l'alto; si assume pertanto r positiva se il veicolo ruota in senso antiorario. La velocità assoluta del baricentro è indicata con \mathbf{V}_g , mentre le distanze dello stesso dagli assali anteriore e posteriore sono indicate rispettivamente dalle lettere a_1 , a_2 . Il passo è indicato con la lettera $l = a_1 + a_2$, mentre la carreggiata, misurata dai centri delle ruote, con la lettera t , specificando con t_1 e t_2 rispettivamente la carreggiata anteriore e quella posteriore. Per quanto riguarda la sterzata cinematica, ovvero con angoli di deriva¹ tutti nulli, occorre precisare che gli angoli di sterzo delle ruote sono diversi tra loro e che l'angolo della ruota interna alla curva risulta più grande di quello della ruota esterna; è possibile ipotizzare però, valendo la seguente relazione²:

$$\delta_e = \delta_i - \frac{t}{l}\delta_i^2 + O(\delta_i^3)$$

che per piccoli valori degli angoli di sterzo si abbia l'uguaglianza tra i due. Possiamo procedere adesso alla formulazione matematica del modello mediante i seguenti tre gruppi di equazioni: equazioni di congruenza, equazioni di equilibrio ed equazioni costitutive.

¹Per la definizione vedere [6] Cap.1, §1.1, pag.5

²Vedere [6] Cap.4, Fig. 4.3 pag.5

1.3 Equazioni di congruenza

Anche se la definizione delle equazioni di congruenza, fornita dalla *teoria classica*³,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \delta - \frac{v + ra_1}{u} \\ \alpha_2 &= -\frac{v - ra_2}{u}\end{aligned}\tag{1.1}$$

continua a valere ancora, è più corretto assumere come grandezza di riferimento per la nostra trattazione, il vettore *scorrimento teorico*, il quale, oltre a tener conto della velocità angolare della ruota, caratterizza il moto del punto di contatto tra pneumatico e strada, permettendo, insieme al trasferimento di carico di definire completamente ciascuna forza a terra.

1.3.1 Definizione dello scorrimento teorico

Consideriamo che l'asse della ruota sia in moto con velocità assegnata \mathbf{V} parallela alla strada, costante in modulo e direzione, ed inclinata, in generale, dell'angolo di deriva α ; l'asse avrà quindi un moto traslatorio uniforme di componenti

$$\begin{aligned}V_x &= V \cos \alpha \\ V_y &= V \sin \alpha\end{aligned}$$

il cui sistema di riferimento è mostrato in Fig 1.2. Il cerchio della ruota si muoverà, inoltre, di moto rotatorio attorno al proprio asse, con una velocità angolare $\Omega = (0, \Omega, 0)$ dipendente, non solo dalla velocità \mathbf{V} , ma anche dalla coppia T (wheel drive torque) applicata all'asse ruota (motrice se $T > 0$, frenante se $T < 0$), dall'angolo di deriva α , dal carico verticale, nonchè dal tipo di pneumatico etc. Normalmente per le prove si considera solamente l'effetto della variazione di T e di α .

³Per classica si intende la teoria esposta in [6] cap.4, §4.3 dove, per esprimere le equazioni di congruenza, necessarie per la definizione del modello matematico di veicolo, si è utilizzato l'angolo di deriva come grandezza cinematica di riferimento.

Noti $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$ e $\Omega = (0, \Omega, 0)$ è possibile, in ogni istante, individuare l'*asse elicoidale* (o asse di Mozzi) dell'atto di moto del cerchio. Come noto i punti dell'asse elicoidale hanno velocità parallela al vettore velocità angolare, pertanto, nel caso in esame, l'asse elicoidale risulta sempre parallelo all'asse y , ed i suoi punti hanno velocità pari a $(0, -V \sin \alpha, 0)$. Indicando con R la distanza con segno fra l'asse del cerchio e l'asse elicoidale, si ottiene subito la seguente espressione

$$R = \frac{V_x}{\Omega} \quad (1.2)$$

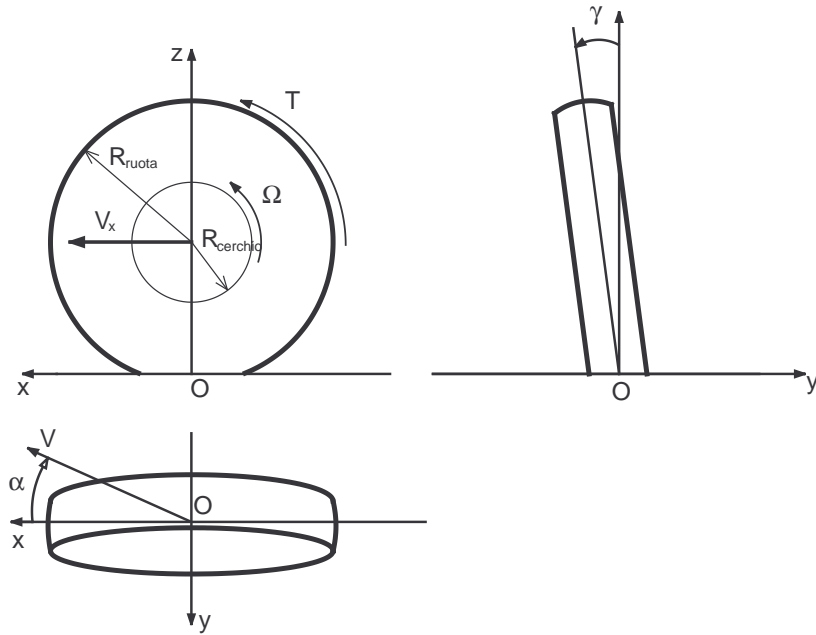


Figura 1.2: Rappresentazione del sistema di riferimento e del verso positivo adottato per la descrizione delle caratteristiche della ruota

È evidente che l'asse elicoidale si trova sempre al di sotto dell'asse del cerchio, come illustrato in Fig 1.3, dove è sì è indicata con la lettera C la traccia dell'asse elicoidale nel piano coordinato $x - z$.

Occorre notare che, nel caso si abbia un angolo di deriva nullo ($\alpha = 0$), e quindi

$V_y = 0$, l'asse elicoidale diventa asse d'istantanea rotazione e tutti i suoi punti assumono velocità nulla.

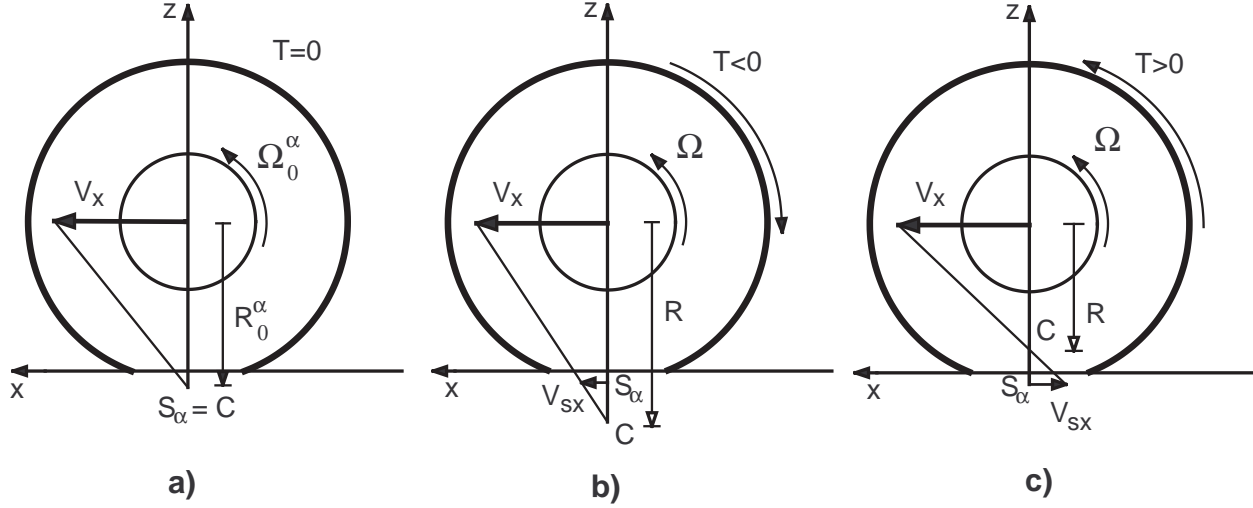


Figura 1.3: Effetto di una coppia sulla posizione della traccia C dell'asse elicoidale del cerchio; a) caso con coppia nulla $T = 0$, b) caso con coppia frenante $T < 0$, c) caso con coppia motrice $T > 0$

Convenzionalmente si parla di *puro rotolamento* quando la ruota rotola in direzione perfettamente longitudinale ($\alpha = 0$) e senza coppia applicata all'asse ($T = 0$). In queste particolari condizioni, il cerchio ruoterà con una certa velocità angolare, indicata con Ω_0 , mentre la distanza fra l'asse d'istantanea rotazione dello stesso e l'asse della ruota, verrà indicata con R_0 ; le grandezze sono legate dalla seguente relazione:

$$R_0 = \frac{V}{\Omega_0} \quad (1.3)$$

Se, a parità di tutti gli altri parametri, la ruota risulta ancora *folle* ($T = 0$), ma con un angolo di deriva non nullo ($\alpha \neq 0$), il cerchio ruoterà con una velocità di rotazione minore di Ω_0 , che verrà indicata con Ω_0^α . Inoltre, dato che il cerchio non ha più un moto piano, l'asse d'istantanea rotazione viene rimpiazzato dall'asse elicoidale. In base

alla (1.2), anche in queste nuove condizioni, si può calcolare la distanza (questa volta indicata con R_0^α) fra l'asse della ruota e l'asse elicoidale dell'atto di moto del cerchio,

$$R_0^\alpha = \frac{V \cos \alpha}{\Omega_0^\alpha} \quad (1.4)$$

mentre la traccia dell'asse di Mozzi sul piano $x - z$ verrà indicata con S_α , come mostrato in Fig. 1.3 a).

L'applicazione all'asse del cerchio di una coppia $T \neq 0$, come mostrato in Fig. 1.3 b), determina un nuovo valore Ω (con $\Omega \neq \Omega_0^\alpha$) della velocità angolare del cerchio stesso e quindi un riposizionamento dell'asse elicoidale, che verrà a trovarsi ad una distanza R dal centro ruota:

$$R = \frac{V \cos \alpha}{\Omega} \quad (1.5)$$

In queste nuove condizioni di funzionamento il punto, definito in precedenza, assume rispetto alla strada una velocità V_s , normalmente definita *velocità di scorrimento*, le cui componenti sono date da

$$\mathbf{V}_s = \begin{cases} V_{sx} = V \cos \alpha - \Omega R_0^\alpha = (\Omega_0^\alpha - \Omega) R_0^\alpha \\ V_{sy} = -V \sin \alpha = -V \tan \alpha = -\Omega_0^\alpha R_0^\alpha \tan \alpha \end{cases} \quad (1.6)$$

La velocità di scorrimento V_s è, quindi, diretta come l'asse x se $\alpha = 0$, e come l'asse y se $T = 0$, ovvero se $\Omega = \Omega_0^\alpha$.

È utile definire un vettore velocità ausiliario

$$\mathbf{V}_r = (\Omega R_0^\alpha, 0, 0) \quad (1.7)$$

che rappresenta la velocità di rotolamento, ovvero la parte della velocità del centro ruota che non comporta scorrimento con il piano stradale; si ha infatti la seguente

relazione

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_s$$

Dato che le velocità \mathbf{V} , \mathbf{V}_r , e \mathbf{V}_s hanno sempre la terza componente nulla, si considerano per semplicità, come vettori a due componenti.

Per caratterizzare completamente il moto del cerchio, sono sufficienti i valori di V , α , ed Ω , tuttavia è conveniente introdurre dei parametri adimensionali, che meglio esprimano lo scostamento dalle condizioni di funzionamento con $T = 0$. Si definisce, quindi, il vettore *scorrimento teorico* definito come il rapporto tra la velocità di scorrimento \mathbf{V}_s ed il modulo della velocità di rotolamento V_r :

$$\sigma = \frac{\mathbf{V}_s}{V_r} = \left(\frac{\Omega_0^\alpha}{\Omega} - 1, \frac{\Omega_0^\alpha}{\Omega} \tan \alpha \right) \quad (1.8)$$

1.3.2 Scorrimento teorico di ciascuna ruota

Dalla definizione di scorrimento teorico (1.8) è possibile ottenere, adesso, l'espressione degli scorrimenti per le quattro ruote del veicolo considerando, come da ipotesi, un veicolo sterzante solamente all'anteriore ($\delta_1 \neq 0$ e $\delta_2 = 0$) e con trazione al posteriore :

- Scorrimenti longitudinali

$$\begin{aligned} \sigma_{x_{11}} &= \frac{(u - rt_1/2) + (v + ra_1)\delta_1 - \Omega_{11}R_1}{\Omega_{11}R_1} \\ \sigma_{x_{12}} &= \frac{(u + rt_1/2) + (v + ra_1)\delta_1 - \Omega_{12}R_1}{\Omega_{12}R_1} \\ \sigma_{x_{21}} &= \frac{(u - rt_2/2) - \Omega_{21}R_2}{\Omega_{21}R_2} \\ \sigma_{x_{22}} &= \frac{(u + rt_2/2) - \Omega_{22}R_2}{\Omega_{22}R_2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

- Scorrimenti laterali

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_{11}} &= -\frac{(u - rt_1/2)\delta_1 + (v + ra_1)}{\Omega_{11}R_1} \\
\sigma_{y_{12}} &= -\frac{(u + rt_1/2)\delta_1 + (v + ra_1)}{\Omega_{12}R_1} \\
\sigma_{y_{21}} &= \frac{(v - ra_2)}{\Omega_{21}R_2} \\
\sigma_{y_{22}} &= \frac{(v - ra_2)}{\Omega_{22}R_2}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

dove sono state indicate con i termini Ω_{ij} le velocità angolari dei cerchi delle singole ruote, mentre con R_1 ed R_2 i raggi di rotolamento, rispettivamente delle ruote anteriori e posteriori. Occorre precisare che, sperimentalmente, si nota una scarsa dipendenza del raggio di rotolamento dal carico verticale agente sul pneumatico, basti osservare che la lunghezza della cintura rimane praticamente costante.

Per rendere più chiara la notazione, si osserva che le ruote anteriori si trovano in condizione di puro rotolamento, e quindi, per definizione, hanno scorrimento longitudinale nullo e velocità pari a

$$\begin{aligned}
\Omega_{11}R_1 &= \left(u - \frac{rt_1}{2}\right) + (v + ra_1)\delta_1 \\
\Omega_{12}R_1 &= \left(u + \frac{rt_1}{2}\right) + (v + ra_1)\delta_1.
\end{aligned}$$

Di conseguenza lo scorrimento laterale assume la forma

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_{11}} &= \frac{-(u - rt_1/2)\delta_1 + (v + ra_1)}{(u - rt_1/2) + (v + ra_1)\delta_1} \simeq \frac{-(u - rt_1/2)\delta_1 + (v + ra_1)}{(u - rt_1/2)} \simeq -\delta_1 + \frac{v + ra_1}{u} = -\alpha_1 \\
\sigma_{y_{12}} &= \frac{-(u + rt_1/2)\delta_1 + (v + ra_1)}{(u + rt_1/2) + (v + ra_1)\delta_1} \simeq \frac{-(u + rt_1/2)\delta_1 + (v + ra_1)}{(u + rt_1/2)} \simeq -\delta_1 + \frac{v + ra_1}{u} = -\alpha_1.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Quindi gli scorrimenti teorici per le quattro ruote risulteranno:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_{11}} &= \sigma_{x_{12}} = \sigma_{x_1} = 0 \\
 \sigma_{y_{11}} &= \sigma_{y_{12}} = \sigma_{y_1} = -\alpha_1 \\
 \sigma_{x_{21}} &= -\left(1 - \frac{u - rt/2}{\Omega_2 R_2}\right) \\
 \sigma_{x_{22}} &= -\left(1 - \frac{u + rt/2}{\Omega_2 R_2}\right) \\
 \sigma_{y_{21}} &= \sigma_{y_{22}} = \sigma_{y_2} = \frac{v - ra_2}{\Omega_2 R_2}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

dove con $\Omega_2 = \Omega_{21} = \Omega_{22}$ si è indicata la velocità angolare dei cerchi delle ruote posteriori (essendo il differenziale bloccato), e con R_2 il loro raggio di rotolamento; di conseguenza, con il prodotto $\Omega_2 R_2$, si indicherà la velocità di rotolamento delle ruote motrici. È importante sottolineare come la presenza di uno slittamento longitudinale anche piccolo, purchè diverso da zero, determini il passaggio immediato dall'espressione dello scorrimento laterale (e longitudinale) delle ruote anteriori a quello delle ruote posteriori. Infatti, mentre i primi sono legati solamente all'angolo di deriva, che è una grandezza cinematica dipendente dalle condizioni globali del veicolo, i secondi sono legati, oltre che alle velocità caratteristiche (v, r) , anche alla velocità angolare della ruota, che è influenzata da fattori non strettamente cinematici, come ad esempio la coppia applicata alla ruota, quella erogata dal motore etc..

Rispetto a quanto scritto precedentemente, si osserva che nelle normali condizioni di marcia, $\Omega_2 R_2$ ed u sono poco diversi tra loro, tanto da poter porre

$$\Omega_2 R_2 = u + q \tag{1.13}$$

ossia

$$\frac{\Omega_2 R_2}{u} = 1 + \frac{q}{u} \quad (1.14)$$

con

$$\frac{q}{u} \ll 1.$$

È evidente che ciò che accade alle ruote posteriori non accade invece a quelle anteriori, dove, la mancanza di un'azione motrice alla ruota, determina scorrimenti longitudinali nulli, con conseguente uguaglianza tra la velocità longitudinale del veicolo e la velocità di rotolamento delle ruote anteriori

$$\Omega_1 R_1 = u$$

Avvalendosi delle ultime espressioni, è possibile scrivere nuovamente gli scorrimenti teorici delle ruote posteriori *linearizzati* rispetto al termine q/u :

$$\begin{aligned} \sigma_{x_{21}} &\simeq - \left[\frac{q}{u} + \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) \right] \\ \sigma_{x_{22}} &\simeq - \left[\frac{q}{u} - \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) \right] \\ \sigma_{y_2} &\simeq -\alpha_2 \left(1 - \frac{q}{u} \right) = \left(\frac{v - ra_2}{u} \right) \left(1 - \frac{q}{u} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si noti, quindi, come non sia più sufficiente l'angolo di deriva a caratterizzare il comportamento dei pneumatici posteriori, basti pensare che in marcia rettilinea, essendo $r = 0$, gli scorrimenti longitudinali coincidono, di fatto, con q/u e ciò a testimonianza

del fatto che quest'ultimi saranno piccoli, ma non rigorosamente nulli.

Appare quindi più corretto utilizzare lo scorrimento teorico come grandezza di riferimento invece dell'angolo di deriva della teoria classica.

1.4 Equazioni di equilibrio

Per poter esprimere le equazioni di equilibrio, occorre calcolare le espressioni delle accelerazioni e valutare, successivamente, le forze ed i momenti agenti sul veicolo.

1.4.1 Accelerazioni

Per quanto riguarda la determinazione delle accelerazioni, possiamo dire che nulla cambia rispetto alla teoria classica; infatti possiamo definire:

- L'*accelerazione del baricentro* come la derivata della velocità $\mathbf{V}_G = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ rispetto al tempo

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_G &= \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \dot{u}\mathbf{i} + \dot{v}\mathbf{j} + ur\mathbf{j} - vr\mathbf{i} \\ &= (\dot{u} - vr)\mathbf{i} + (\dot{v} + ur)\mathbf{j} \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}\end{aligned}\tag{1.16}$$

ottenendo così una scomposizione dell'accelerazione baricentrale in *accelerazione longitudinale*

$$a_x = \dot{u} - vr\tag{1.17}$$

ed in *accelerazione laterale*

$$a_y = \dot{v} + ur = \dot{v} + \frac{u^2}{R} \quad (1.18)$$

rispetto all'asse del veicolo.

- L'*accelerazione laterale a regime*

$$\tilde{a}_y = ur = \frac{u^2}{R} \quad (1.19)$$

che espressa in questa forma permette di scrivere l'accelerazione laterale nel modo seguente $a_y = \dot{v} + \tilde{a}_y$.

È possibile inoltre rapportare l'accelerazione laterale a_y all'accelerazione gravitazionale g ottenendo

$$k = \frac{\tilde{a}_y}{g} \quad (1.20)$$

il cui valore massimo è detto *tenuta in curva*.

- L'*accelerazione angolare* come data semplicemente da \dot{r} .

1.4.2 Forze e momenti agenti sul veicolo

Per la valutazione delle forze e dei momenti agenti sul veicolo, occorre precisare che, rispetto alla teoria classica, compare un termine supplementare rappresentato dal momento d'imbardata, che agisce sul veicolo a seguito del bloccaggio del differenziale.

Per convenzione si indicano con $F_{x_{ij}}$ le componenti longitudinali e con $F_{y_{ij}}$ le componenti trasversali delle forze trasmesse dalla strada alle ruote. Occorre precisare che i termini longitudinale e trasversale sono relativi ad un sistema di riferimento solidale

alla ruota e non all'intero veicolo. Si considerano nulli, per semplicità, tutti i momenti di autoallineamento $M_{z_{ij}}$, in quanto lo spostamento di qualche centimetro della retta di applicazione delle forze laterali, rispetto al piano medio trasversale della ruota, non avrebbe significativi effetti sulla dinamica globale dell'intero veicolo.

Tenendo presente che per angoli di sterzo fino a $15^\circ \simeq 0.26 \text{ rad}$ è lecito⁴ porre $\cos \delta \simeq 1$ e $\sin \delta \simeq \delta$ e, considerando le forze agenti sul veicolo, otteniamo le tre equazioni di equilibrio (longitudinale, laterale e a momento) :

$$\begin{aligned}
 m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) - (F_{y_{11}} + F_{y_{12}})\delta_1 + (F_{x_{21}} + F_{x_{22}}) - F_a \\
 m(\dot{v} + ur) &= (F_{x_{11}} + F_{x_{12}})\delta_1 + (F_{y_{11}} + F_{y_{12}}) + (F_{y_{21}} + F_{y_{22}}) \\
 J\dot{r} &= [(F_{x_{11}} + F_{x_{12}})\delta_1 + (F_{y_{11}} + F_{y_{12}})]a_1 - (F_{y_{21}} + F_{y_{22}})a_2 + \\
 &\quad - (F_{x_{11}} - F_{x_{12}})t_1/2 - (F_{x_{21}} - F_{x_{22}})t_2/2 + (F_{y_{11}} - F_{y_{12}})\delta_1 t_1/2
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

all'interno della quale si indica con F_a la forza aerodinamica

$$F_a = \frac{1}{2}\rho S C_x u^2$$

dove:

- ρ = densità dell'aria
- S = superficie della proiezione frontale del veicolo
- C_x = coefficiente di resistenza aerodinamica

⁴La linearizzazione trigonometrica dell'angolo di sterzo può ritenersi valida anche nell'analisi dinamica del veicolo con pneumatici non lineari; questo perchè, anche in condizioni limite di perdita di aderenza, gli angoli di deriva non superano i $15^\circ - 20^\circ$, così come quelli di sterzo e quindi restano valide le precedenti linearizzazioni.

- u = velocità longitudinale del veicolo

Per rendere più compatta la notazione si sommano i contributi delle due ruote di uno stesso assale

$$\begin{aligned}
 F_{x_1} &= F_{x_{11}} + F_{x_{12}} \\
 F_{x_2} &= F_{x_{21}} + F_{x_{22}} \\
 F_{y_1} &= F_{y_{11}} + F_{y_{12}} \\
 F_{y_2} &= F_{y_{21}} + F_{y_{22}}
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Restringendo l'analisi ai veicoli a due ruote motrici, ed in particolar modo a quelli a trazione posteriore e sterzata all'anteriore, si ottiene una semplificazione, trascurando la resistenza a rotolamento dei pneumatici anteriori e ponendo $F_{x_{11}} = F_{x_{12}} = 0$.

Rimane ancora il termine $(F_{y_{11}} + F_{y_{12}})\delta_1 t_1/2$ il quale non è rigorosamente nullo, visto che $F_{y_{11}} \neq F_{y_{12}}$; infatti, anche se le ruote di uno stesso assale lavorano con angoli di deriva simili, non hanno necessariamente simili forze laterali. Questo deriva principalmente dal diverso carico verticale gravante sulle ruote dell'assale, a seguito del trasferimento di carico generato, durante la percorrenza di una curva, dall'azione dell'accelerazione laterale. Occorre osservare, però, che il prodotto della differenza delle forze laterali dell'assale anteriore per l'angolo di sterzo, espresso in radianti, risulta piccolo e, poichè il valore di quest'ultimo non supera, nella nostra analisi, i 15° , possiamo trascurare quest'ultimo termine senza compiere un grossolano errore, con il vantaggio di una notevole semplificazione matematica oltre che formale.

In base a quanto detto possiamo riscrivere le equazioni di equilibrio nella forma seguente:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{u} - vr) &= F_{x_2} + F_{y_1}\delta_1 - F_a \\
 m(\dot{v} + ur) &= F_{y_1} + F_{y_2} \\
 J\dot{r} &= F_{y_1}a_1 - F_{y_2}a_2 + M_{z_2}
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

dove, oltre alle componenti longitudinali e trasversali delle forze globali degli assali,

compare anche un'altra grandezza:

- Il *momento d'imbardata*

$$M_{z_2} = (F_{x_{22}} - F_{x_{21}}) \frac{t_2}{2}. \quad (1.24)$$

Occorre precisare che l'intera analisi verrà svolta considerando il sistema a regime, trascurando quindi il transitorio che intercorre tra un'eventuale manovra e l'attimo in cui il veicolo si stabilisce su una particolare traiettoria. Questo, ovviamente, determina un'ulteriore variazione nell'espressione delle equazioni di equilibrio, dove scompare la dipendenza dal tempo, dovuta alle derivate della velocità longitudinale, trasversale e d'imbardata ($\dot{u} = \dot{v} = \dot{r} = 0$)

$$\begin{aligned} -mvr &= F_{x_2} + F_{y_1} \delta_1 - F_a \\ mur &= F_{y_1} + F_{y_2} \\ 0 &= F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 + M_{z_2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.5 Equazioni costitutive

Per completare il modello di veicolo, necessario per l'analisi dinamica, restano da definire le caratteristiche di ciascun pneumatico. Questo è possibile enunciando le equazioni costitutive che possono essere considerate le discriminanti dei vari casi in cui è suddivisa l'analisi, a seconda della tipologia di pneumatico modellato.

A differenza di ciò che accade nella teoria classica, le forze tangenziali, esercitate dalla strada su ciascun pneumatico, dipendono sia dal corrispondente scorrimento teorico

σ_{ij} che dal carico verticale $F_{z_{ij}}$ gravante su ciascuna ruota

$$\mathbf{F} = -\frac{\vec{\sigma}}{\sigma} f(\sigma, \pm \Delta F_{z_{ij}}).$$

In analogia con ciò che avviene nella teoria classica, si trascura l'influenza dell'angolo di camber sulla forza laterale $F_{y_{ij}}$, in quanto, avendo considerato trascurabili gli angoli di caster e di kingpin, ed assumendo basso il valore del rollio, risultano trascurabili le variazioni dell'angolo di camber delle singole ruote. Le equazioni costitutive saranno enunciate con le opportune espressioni a seconda del caso in esame, all'interno del capitolo corrispondente.

1.6 Modello monotraccia

Per completare il modello matematico, necessario per lo studio della dinamica di un veicolo con differenziale bloccato, conviene, a questo punto, mettere insieme i tre gruppi di equazioni (congruenza, equilibrio e costitutive), ottenendo un sistema che è alla base del *modello monotraccia*⁵ (*single track model*). Questa volta, a differenza della *teoria classica*, il sistema è costituito solo da equazioni valide a regime, ossia durante uno *steering pad*, risultando quindi indipendente dalla variabile *tempo*. Una volta fissato il modello, prima di procedere con l'analisi e quindi con la risoluzione del sistema, non resta che stabilire cosa considerare noto e cosa incognito. Una scelta naturale è supporre assegnate sia la velocità longitudinale del veicolo u , che l'angolo di sterzo δ , lasciando come incognite la velocità laterale v e quella d'imbardata r , che risultano essere le uniche *variabili di stato* del sistema. Occorre dire che, oltre a v ed r , il sistema ha una nuova incognita, costituita dal termine q/u (introdotto per tener conto della presenza di piccoli slittamenti alle ruote posteriori motrici). Quest'ultimo, pur non

⁵[6] cap.4, §4.6

essendo una nuova variabile di stato, impedisce il disaccoppiamento delle equazioni del sistema dinamico (come avviene, invece, nella *teoria classica*), e, cosa più importante, trasforma il sistema in un *sistema non lineare*, indipendentemente dal tipo di modello di pneumatico scelto per l'analisi.

Capitolo 2

Analisi con pneumatico linearizzato

Per poter descrivere compiutamente il veicolo, e quindi definire il modello matematico necessario per la sua analisi, occorre specificare quelle che sono le equazioni costitutive delle ruote.

2.1 Equazioni costitutive

L'analisi che verrà sviluppata in questo capitolo, si avvale dell'ipotesi di pneumatico *lineare*, ovvero caratterizzato da equazioni costitutive, nelle quali vi sia una dipendenza di linearità tra gli scorrimenti e le forze scambiate a terra fra strada e pneumatico.

Il generico legame costitutivo per la singola ruota è dato da:

$$\mathbf{F} = -\frac{\vec{\sigma}}{\sigma} f(\sigma, \pm \Delta F_z)$$

dove le forze, indicate con il vettore \mathbf{F} , risultano funzioni sia dello scorrimento teorico, che del trasferimento di carico sulla ruota e dove il segno $-$ sta ad indicare che il verso della forza tangenziale è convenzionalmente opposto a quello dello scorrimento.

Sviluppando la funzione in serie di Taylor-MacLaurin nell'intorno di $\sigma = 0$ e $\Delta F_z = 0$

si ottiene:

$$f(\sigma, \pm\Delta F_z) = f(0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} \sigma \pm \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta F_z} \right|_{\Delta F_z=0} \Delta F_z \pm \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \Delta F_z} \right|_{\Delta F_z=0, \sigma=0} \Delta F_z \sigma + \dots$$

e dato che sono nulli il primo ed il terzo addendo, oltre a tutte le altre derivate seconde, avendo trascurato l'influenza dell'angolo di camber, possiamo scrivere:

$$f(\sigma, \pm\Delta F_z) = C^0 \sigma \pm k \Delta F_z \sigma + \dots \quad (2.1)$$

Con C^0 si è indicata la derivata prima della funzione rispetto allo scorrimento teorico $C^0 = \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0}$, che dà la misura della prontezza di risposta del pneumatico per valori dello scorrimento, f prossimi a zero, mentre con k si è indicata la derivata mista $k = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \Delta F_z} \right|_{\Delta F_z=0, \sigma=0}$ della funzione f .

2.1.1 Definizione di k_i

Osservando l'espressione sopra, si nota che, per poter determinare il valore della grandezza k , risulta necessario definire matematicamente la funzione f .

Per fare questo, si è fatto uso della *Magic Formula*¹ di Pacejka che permette, non solo una migliore modellazione del pneumatico e delle sue caratteristiche, ma anche, di conseguenza, una maggiore accuratezza nell'analisi.

L'espressione completa della Magic Formula è rappresentata dalla seguente funzione trascendente

$$y(x) = D \sin \left(C \arctan(Bx - E[Bx - \arctan(Bx)]) \right) \quad (2.2)$$

¹Per la definizione ed una spiegazione dettagliata vedere [10]

all'interno della quale si fa assumere alla variabile libera x il significato di scorrimento teorico (σ), mentre con y si indica la forza tangenziale scambiata a terra dal pneumatico.

Tenendo conto di tutte le caratteristiche della Magic Formula, espresse in [10], si possono sinteticamente definire i parametri della funzione necessari per una modellazione accurata del pneumatico di ciascuna ruota.

Infatti i parametri evidenziati all'interno della Magic Formula con lettere maiuscole, sono fondamentali per attribuire un andamento desiderato alla funzione $y(x)$, ed è per questo motivo che occorre fissarli opportunamente:

- D (*peak value*) è il parametro che definisce il massimo valore assunto dalla funzione, e può essere definito come:

$$D_{ij} = \mu F_{z_{ij}} = (a_1 F_{z_{ij}} + a_2) F_{z_{ij}}$$

dove con $F_{z_{ij}}$ si è indicato il carico agente sulla generica ruota, mentre i termini a_1 ed a_2 sono necessari per definire il coefficiente di aderenza μ in funzione del carico verticale. Adesso, avvalendoci della relazione

$$F_{z_{ij}} = F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i}, \quad (2.3)$$

dove il segno $+$ è per le ruote esterne alla curva ed il $-$ per quelle interne, avendo chiamato con $F_{z_{ij}}^0$ il carico statico gravante su ogni singola ruota, e con ΔF_{z_i} il trasferimento di carico su ciascun assale, possiamo scrivere nuovamente D_{ij} come

$$D_{ij} = \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) (F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i}) \quad (2.4)$$

che rappresenta l'espressione completa del parametro D_{ij} , utilizzata per ciascuna ruota all'interno della trattazione.

- C (*shape factor*) ed E (*curvature factor*) sono i parametri che definiscono la forma e la curvatura di $y(x)$; normalmente la scelta di questi valori è molto importante, in quanto, dalla combinazione dei due, si possono ottenere andamenti della funzione, molto diversi tra loro. Se $E < 1$ e $0 < C \leq 1$, infatti, la funzione $y(x)$ ha un andamento *monotono crescente* ad un valore asintotico definito dalla relazione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = D \sin\left(\frac{C\pi}{2}\right),$$

mentre se $E < 1$ ma $1 < C \leq 2$, la funzione ha un *massimo relativo* per $x = x_m$, con $y(x_m) = D$; quest'ultimo è il caso più importante nelle applicazioni. Il valore dell'ascissa x_m , in cui si ha il massimo relativo, si può ottenere risolvendo la seguente equazione

$$B(1 - E)x_m + E \arctan(Bx_m) = \tan\left(\frac{\pi}{2C}\right)$$

dalla quale, considerando $E = 0$ (così come all'interno della nostra trattazione) si ottiene immediatamente

$$Bx_m = \tan\left(\frac{\pi}{2C}\right)$$

dove con B si è indicato il parametro di seguito riportato.

- B (*stiffness factor*) viene usato normalmente per fissare la pendenza di $y(x)$ nell'origine; la pendenza (o rigidezza) è definita come una semplice funzione di tre parametri

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = BCD = a_3 \sin\left(2 \arctan\left(\frac{F_z}{a_4}\right)\right)$$

dove si indica con a_3 il valore massimo raggiungibile dalla rigidezza, quando l'argomento del seno è uguale a $\frac{\pi}{2}$, mentre con a_4 si indica il valore del carico sulla ruota, al quale si raggiunge la rigidezza massima. Dalla precedente relazione, possiamo ottenere:

$$B_{ij} = \frac{a_3 \sin\left(2 \arctan\left(\frac{F_{z_{ij}}}{a_4}\right)\right)}{CD_{ij}}$$

dalla quale, se sostituissimo la (2.3), otterremmo l'espressione completa:

$$B_{ij} = \frac{a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i}}{a_4} \right) \right)}{CD_{ij}} \quad (2.5)$$

valida per ciascuna ruota. Ovviamente occorre fare attenzione al segno assunto, per ogni ruota, dal trasferimento di carico.

Determinati, adesso, i valori dei parametri della Magic Formula, non resta altro che scrivere l'intera espressione della funzione $f(\sigma, \pm \Delta F_z)$, osservando che, poichè nella trattazione, si considera $E = 0$, si otterrà un'evidente semplificazione:

$$f(\sigma, \pm \Delta F_z) = \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) \cdot \quad (2.6)$$

$$\cdot \sin \left(C \arctan \left(\frac{a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i}}{a_4} \right) \right)}{C \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right)} \right) \sigma \right)$$

Pertanto il valore del termine k si otterrà dimezzando il risultato ottenuto, derivando la funzione sia rispetto allo scorrimento teorico σ che rispetto al trasferimento di carico ΔF_{z_i} , specificandone il valore per $\sigma = 0$ e per $\Delta F_{z_i} = 0$.

2.1.2 Definizione di ΔF_{z_i}

Così come è stato fatto per il termine k , risulta opportuno valutare l'espressione che definisce il termine ΔF_{z_i} , per poter ottenere successivamente un valore numerico per la nostra trattazione. Il trasferimento di carico sull'assale i-esimo, varia, ovviamente, con il moto del veicolo, ed in particolare è sensibile alla variazione dell'accelerazione

laterale a_y ; l'espressione che lo definisce è data da:

$$\Delta F_{z_i} = \frac{1}{t_i} \left(\frac{a_j}{l} d_i + \frac{k_{\phi_i}}{k_\phi} (h - d) \right) m a_y$$

dove:

- t_i = carreggiata relativa all'assale i-esimo
- l = passo del veicolo
- a_j = semipasso relativo all'altro assale
- d_i = altezza da terra della traccia nata dall'intersezione dell'asse di rollio, con il piano verticale passante per l'assale i-esimo
- d = altezza da terra della traccia nata dall'intersezione dell'asse di rollio con il piano verticale passante per il baricentro
- k_ϕ = rigidezza totale a rollio
- k_{ϕ_i} = rigidezza a rollio relativa all'assale i-esimo
- h = altezza del baricentro da terra
- m = massa del veicolo
- a_y = accelerazione laterale del veicolo.

Tale formula è composta da due termini: il primo individua la parte di ΔF_{z_i} trasferita dai braccetti della sospensione, mentre il secondo indica la parte trasferita dagli organi elastici (molle e barra di torsione).

Chiamando con B_i il termine

$$B_i = \frac{1}{t_i} \left(\frac{a_j}{l} d_i + \frac{k_{\phi_i}}{k_\phi} (h - d) \right)$$

l'espressione del trasferimento di carico diventa

$$\Delta F_{z_i} = B_i m a_y$$

che nel nostro caso, svolgendo l'analisi in condizione di regime, assume la forma

$$\Delta F_{z_i} = B_i m \tilde{a}_y \quad (2.7)$$

2.1.3 Espressione delle equazioni costitutive

Noti, adesso, tutti i termini che caratterizzano la forma vettoriale delle equazioni costitutive, è possibile specificarle, determinando le espressioni delle componenti longitudinali e trasversali per ciascuna ruota

$$\begin{aligned} F_{x_{ij}} &= -(C_{x_i}^0 \pm k \Delta F_{z_i}) \sigma_{x_{ij}} \\ F_{y_{ij}} &= -(C_{y_i}^0 \pm k \Delta F_{z_i}) \sigma_{y_{ij}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove si deve prendere il segno $+$ se $j = 2$, ovvero se prendiamo in esame le ruote del fianco destro della vettura, mentre si deve prendere il segno $-$ se $j = 1$ e le ruote considerate sono quelle del lato sinistro; per specificare, invece, quale sia l'assale a cui appartengono le ruote si usa l'indice i , specificando con $i = 1$ l'assale anteriore e $i = 2$ quello posteriore. Con i termini $C_{x_i}^0, C_{y_i}^0$ sono state chiamate le rigidezze di deriva, rispettivamente longitudinale e trasversale, della singola ruota, considerando un carico statico e scorrimenti tutti nulli. Per semplicità nella trattazione verranno assunte uguali $C_{x_i}^0 = C_{y_i}^0$.

Avvalendoci, adesso, della (2.7) scriviamo nuovamente le forze laterali e longitudinali per ciascuna ruota, esplicitando l'accelerazione laterale a regime

$$\begin{aligned} F_{x_{ij}} &= -(C_{x_i}^0 \pm k B_i m \tilde{a}_y) \sigma_{x_{ij}} \\ F_{y_{ij}} &= -(C_{y_i}^0 \pm k B_i m \tilde{a}_y) \sigma_{y_{ij}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Introducendo un nuovo parametro, H_i definito come

$$H_i = k B_i, \quad (2.10)$$

possiamo scrivere le espressioni definitive delle forze longitudinali e trasversali scambiate a terra da ciascuna ruota :

$$\begin{aligned} F_{x_{ij}} &= -(C_{x_i}^0 \pm H_i m \tilde{a}_y) \sigma_{x_{ij}} \\ F_{y_{ij}} &= -(C_{y_i}^0 \pm H_i m \tilde{a}_y) \sigma_{y_{ij}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 Forze sugli assali e momento d'imbardata

A questo punto, prima di mettere insieme tutte le equazioni, può essere conveniente ricavare le forze laterali e longitudinali di ciascun assale, non solo per l'evidente semplificazione formale che si otterrà al momento della stesura del sistema dinamico completo, ma anche per evidenziare l'influenza di alcune grandezze sulle forze stesse. Per quanto riguarda le forze laterali, non ci sono particolari difficoltà, visto che gli scorrimenti laterali delle ruote di uno stesso assale sono *quasi* uguali, come mostrato in (1.10) e (1.11), e quindi gli effetti del trasferimento di carico tendono a compensarsi. Le espressioni delle forze laterali per i due assali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} F_{y_1} &= F_{y_{11}} + F_{y_{12}} = -2C_{y_1}^0 \sigma_{y_1} = 2C_{y_1}^0 \left(\delta - \frac{v + a_1 r}{u} \right) \\ F_{y_2} &= F_{y_{21}} + F_{y_{22}} = -2C_{y_2}^0 \sigma_{y_2} = 2C_{y_1}^0 \left(-\frac{v - a_2 r}{u} \right) \left(1 - \frac{q}{u} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Prendendo in esame, invece, le forze longitudinali c'è da dire che le uniche, diverse da

zero, sono quelle relative all'assale posteriore, visto che, avendo ipotizzato per l'analisi, un veicolo a trazione posteriore, risulterà

$$F_{x_1} = F_{x_{11}} + F_{x_{12}} = 0. \quad (2.13)$$

Le due ruote posteriori, come si nota dalla (1.9) e dalla (1.12), hanno scorrimenti longitudinali, differenti, per cui occorre valutare anche l'effetto del trasferimento di carico. Ciò può essere fatto facilmente solo a regime, in quanto, in queste condizioni, ΔF_{z_2} dipende linearmente dalla massa del veicolo e dall'accelerazione laterale a regime (2.7). Sostituendo l'espressione dello scorrimento longitudinale relativo alle ruote posteriori, all'interno delle rispettive forze, otteniamo:

$$\begin{aligned} F_{x_{21}} &= (2C_{x_2}^0 - H_2 m \tilde{a}_y) \left[\frac{q}{u} + \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) \right] \\ F_{x_{22}} &= (2C_{x_2}^0 + H_2 m \tilde{a}_y) \left[\frac{q}{u} - \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove compare in maniera esplicita l'accelerazione laterale a regime \tilde{a}_y .

In definitiva, unendo queste due espressioni, otteniamo la forza longitudinale risultante dell'assale posteriore:

$$\begin{aligned} F_{x_2} &= F_{x_{21}} + F_{x_{22}} = 2 \left[C_{x_2}^0 \left(1 - \frac{u}{\Omega_2 R_2} \right) - k_1 \Delta F_{z_i} \frac{rt_2}{2\Omega_2 R_2} \right] \\ &\simeq (C_{x_2}^0 - H_2 m \tilde{a}_y) \left[\frac{q}{u} + \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) \right] + (C_{x_2}^0 + H_2 m \tilde{a}_y) \left[\frac{q}{u} - \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) \right] \\ &= 2 \left[C_{x_2}^0 \frac{q}{u} - H_2 m \tilde{a}_y \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Analizzando più da vicino questa formula, si nota una cosa importante, ovvero che, se H_2 fosse nullo, oppure se il veicolo viaggiasse su una traiettoria rettilinea con $r = 0$, l'unico contributo alla F_{x_2} verrebbe dal termine q/u , che, per quanto possa essere

piccolo, deve comunque mantenersi diverso da zero per consentire al veicolo di avere trazione.

Sempre in condizioni di regime ed avvalendosi ancora una volta delle (2.14) è possibile esprimere anche il momento d'imbardata, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 M_{z_2} &= (F_{x_{22}} - F_{x_{21}}) \frac{t_2}{2} = 2 \left[-C_{x_2}^0 \frac{rt_2}{2\Omega_2 R_2} + k_1 \Delta F_{z_i} \left(1 - \frac{u}{\Omega_2 R_2} \right) \right] \frac{t_2}{2} \\
 &\simeq 2 \left[-C_{x_2}^0 \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u} \right) + H_2 m \tilde{a}_y \frac{q}{u} \right] \frac{t_2}{2} \\
 &= A \frac{r}{u} + B \tilde{a}_y \\
 &= \frac{A}{R} + B \tilde{a}_y,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

con $|A| \gg |B|$ ed entrambi dipendenti dal termine q/u . Valutando l'espressione (2.16), è importante osservare che, benchè le condizioni siano quelle di regime, il momento d'imbardata M_{z_2} , dovuto al bloccaggio del differenziale, non dipende solamente dall'accelerazione laterale \tilde{a}_y , ma dipende anche dalla velocità longitudinale u . Nel corso dell'analisi sarà importante valutare l'influenza, sul valore assunto dal momento, delle varie grandezze che lo caratterizzano.

2.3 Comportamento a regime

Combinando equazioni di equilibrio, di congruenza e costitutive, come per la teoria classica, si arriva alla definizione del *sistema dinamico* del veicolo. L'importante differenza, rispetto al caso classico, è che si hanno, solo, relazioni valide a regime.

Le equazioni del moto sono dunque le seguenti:

$$\begin{aligned}
-mvr &= 2C_{x_2}^0 \frac{q}{u} - 2H_2 m \tilde{a}_y \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u}\right) - 2C_{y_1}^0 \left(\delta - \frac{v + a_1 r}{u}\right) \delta - F_a \\
mur &= 2C_{y_1}^0 \left(\delta - \frac{v + ra_1}{u}\right) + 2C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \left(-\frac{v - a_2 r}{u}\right) \\
0 &= 2C_{y_1}^0 \left(\delta - \frac{v + ra_1}{u}\right) a_1 - 2C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \left(-\frac{v - a_2 r}{u}\right) a_2 \\
&\quad - 2 \left[C_{x_2}^0 \frac{rt_2}{2u} \left(1 - \frac{q}{u}\right) - H_2 m \tilde{a}_y \frac{q}{u} \right] \frac{t_2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Osservando il sistema, si nota la presenza del termine q/u , il quale non rimane costante durante il moto, anche supponendo assegnata e costante la velocità di avanzamento del veicolo u . Questo, ovviamente, complica l'analisi, visto che la presenza di q/u non permette di disaccoppiare la prima equazione del sistema dalle altre due (come accade nel caso classico) ed inoltre, anche se il sistema rimane a due sole variabili di stato (v, r) , occorre ugualmente risolvere, per via iterativa, le tre le equazioni accoppiate. In particolare dalla prima si ottiene l'espressione della variabile q/u

$$\frac{q}{u} = \frac{F_a + 2C_{y_1}^0 \left(\delta - \frac{v + ra_1}{u}\right) \delta - mvr + 2H_2 m \tilde{a}_y \frac{rt_2}{2u}}{2C_{x_2}^0 + 2H_2 m \tilde{a}_y \frac{rt_2}{2u}} \tag{2.18}$$

che viene sostituita all'interno delle altre due, attraverso un procedimento ricorsivo, il quale terminerà solo quando verranno trovati i valori delle incognite q/u , v , r che soddisfino contemporaneamente tutte le equazioni.

Il nostro sistema risulta, pertanto, *tempo invariante* (perchè risolto in condizioni di regime) e *non lineare*, a causa della presenza di $q/u \neq \text{cost.}$

2.3.1 Nuovo concetto di gradiente di sottosterzo

Prima di risolvere interamente il sistema, può essere conveniente fare alcune osservazioni; tralasciando momentaneamente la prima equazione (2.18), che permette di ottenere il valore di q/u noti quelli delle due variabili di stato v ed r , possiamo riscrivere le due rimanenti, esprimendole in una forma più conveniente

$$\begin{cases} m\tilde{a}_y &= 2C_{y_1}^0 \alpha_1 + 2C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \alpha_2 \\ \left[2C_{x_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \frac{t_2}{2u^2} - 2H_2 m \frac{q}{u}\right] \frac{t_2}{2} \tilde{a}_y &= 2C_{y_1}^0 \alpha_1 a_1 + 2C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \alpha_2 a_2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} m\tilde{a}_y &= 2C_{y_1}^0 \alpha_1 + 2C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \alpha_2 \\ -M_{z_2} &= 2C_{y_1}^0 \alpha_1 a_1 + 2C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \alpha_2 a_2 \end{cases}$$

dove abbiamo sostituito sia il valore del momento d'imbardata, che l'espressione degli angoli di deriva derivanti dalle (1.1). La soluzione fornita da questo secondo sistema è la seguente

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{m\tilde{a}_y a_2 - M_{z_2}}{2lC_{y_1}^0} \\ \alpha_2 &= \frac{m\tilde{a}_y a_1 + M_{z_2}}{2lC_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right)} \end{cases}$$

dalla quale è possibile ottenere subito il valore di

$$\begin{aligned} \delta - \frac{l}{R} &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ &= \frac{m}{2l} \left(\frac{C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) a_2 - C_{y_1}^0 a_1}{C_{y_1}^0 C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right)} \right) \tilde{a}_y - \frac{1}{2l} \left(\frac{C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) + C_{y_1}^0}{C_{y_1}^0 C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right)} \right) M_{z_2}. \end{aligned}$$

Esplicitando il momento d'imbardata ed operando la sostituzione seguente:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{y_2} &= C_{y_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right) \\ \tilde{C}_{x_2} &= C_{x_2}^0 \left(1 - \frac{q}{u}\right)\end{aligned}$$

si arriva ad avere un'espressione nuova e completa della differenza degli angoli di deriva

$$\begin{aligned}\delta - \frac{l}{R} &= \left[\frac{m}{2l} \left(\frac{\tilde{C}_{y_2} a_2 - C_{y_1}^0 a_1}{C_{y_1}^0 \tilde{C}_{y_2}} \right) - \frac{1}{2l} \left(\frac{\tilde{C}_{y_2} + C_{y_1}^0}{C_{y_1}^0 \tilde{C}_{y_2}} \right) 2 \left(H_2 m \frac{q}{u} - \tilde{C}_{x_2} \frac{t_2}{2u^2} \right) \frac{t_2}{2} \right] \tilde{a}_y \\ &= \left(E + \frac{F}{u^2} \right) \tilde{a}_y\end{aligned}$$

dove sono state introdotte E ed F per semplificare la notazione. Come si può vedere, adesso la differenza tra l'angolo di sterzo e quello di *Ackermann* $\left(\frac{l}{R}\right)$ non dipende più solo da \tilde{a}_y , ma anche dalla velocità longitudinale del veicolo u ; questo deriva dal fatto che il momento d'imbardata è funzione sia di \tilde{a}_y , che di u ($M_{z_2} = M_{z_2}(\tilde{a}_y, u)$).

Tutto ciò porta inevitabilmente a delle conseguenze sulla definizione e sulla misura del *gradiente di sottosterzo* K che, come noto, serve a caratterizzare il comportamento del veicolo. Infatti essendo per definizione

$$K = \frac{d}{d\tilde{a}_y} \left(\delta - \frac{l}{R} \right) \quad (2.19)$$

e ricavando il valore di quest'ultimo per le tre *manovre classiche* (ovvero mantenendo costante a turno una delle seguenti grandezze u , δ , R), si osserva che, questa volta, non esiste, più un unico gradiente di sottosterzo, bensì ne esistono tre, caratterizzanti ciascuno una specifica manovra.

In tabella (2.1) sono riportati i valori dei tre gradienti di sottosterzo insieme con il limite, per $\tilde{a}_y \rightarrow 0$, della differenza degli angoli di deriva per le diverse prove. Ciò che si nota è che solamente nelle manovre eseguite a velocità costante, il limite è zero, mentre, nella teoria classica ciò accadeva per tutte le prove essendo $M_{z_2} = 0$; inoltre,

	K	$\lim_{\tilde{a}_y \rightarrow 0}(\alpha_1 - \alpha_2)$
$u=\text{cost}$	$E + \frac{F}{u^2}$	0
$R=\text{cost}$	E	$\frac{F}{R}$
$\delta=\text{cost}$	$\frac{El}{F+l}$	$\left(\frac{F}{F+l}\right)\delta$

Tabella 2.1: **Gradiente di sottosterzo in funzione del tipo di manovra**

dato che $F > 0$, si ottiene per i tre gradienti, che $K_u > K_R > K_\delta$. Possiamo quindi concludere dicendo che mentre nel modello *classico* il gradiente di sottosterzo, funzione della sola accelerazione laterale, risultava costante e sufficiente a caratterizzare, da solo, il comportamento del veicolo in ogni condizione di funzionamento, adesso dipende anche dai parametri di manovra (la velocità di avanzamento u , oppure l'angolo di sterzo δ). In altri termini con questo nuovo modello, al variare del parametro di manovra, varia anche il valore del gradiente di sottosterzo, che perde così parte del suo significato come indicatore univoco del comportamento dinamico del veicolo.

Passando adesso alla risoluzione del sistema dinamico a regime, risulta difficile proseguire l'analisi per via teorica, poichè il sistema è non lineare, anche se le equazioni costitutive sono lineari. Si sceglie allora la via numerica, avvalendoci di un programma di calcolo matematico che trovi la soluzione per via iterativa.

Capitolo 3

Analisi numerica per il caso con pneumatici lineari

Per l'analisi numerica a regime del modello caratterizzato da pneumatici lineari è stato impiegato il programma di calcolo *mathcad 2001 professional*. Le variabili del sistema dinamico sono rappresentate dalle grandezze q/u , v , r , i cui valori sono trovati, dal programma di calcolo, operando ricorsivamente, in maniera *analitica*, esponendo, successivamente, le terne di valori che rappresentano la totalità delle soluzioni trovate del sistema. In realtà occorre precisare, che un'operazione del genere è possibile solamente se la risoluzione del sistema non determina un'eccessiva complessità di calcolo; infatti qualora ciò si verificasse (come nel caso di pneumatico non lineare trattato successivamente) bisognerebbe cercare la soluzione per via *numerica*.

Un'operazione da eseguire indipendentemente dalla scelta del tipo di risoluzione da adottare, è specificare i dati del sistema, attraverso l'assegnazione di un valore opportuno alle grandezze in gioco.

3.1 Dati utilizzati per l'analisi

Per l'analisi abbiamo deciso di assumere i seguenti valori:

- Passo e semipassi:

$$l = 2.7m$$

$$a_1 = 1.2m, a_2 = 1.5m;$$

- Carreggiata posteriore:

$$t_2 = 1.3m;$$

- massa del veicolo:

$$1200 \text{ Kg};$$

- Rigidezze di deriva per ciascuna ruota:

$$\text{anteriore: } C_{x_1}^0 = C_{y_1}^0 = 50 \text{ KN/rad}$$

$$\text{posteriore: } C_{x_2}^0 = C_{y_2}^0 = 50 \text{ KN/rad};$$

- Rigidezze di rollio dell'assale:

$$\text{anteriore: } K_{\phi_1} = 39750 \text{ Nm/rad}$$

$$\text{posteriore: } K_{\phi_2} = 35250 \text{ Nm/rad};$$

- Altezza da terra della traccia dell'asse di rollio in corrispondenza dei piani passanti per ciascun assale:

$$d_i = 0.03 \text{ m};$$

- Carico verticale statico gravante su ciascuna ruota posteriore:

$$F_{z2j} = 2000 \text{ N}$$

- Il termine B_2 avrà quindi il seguente valore:

$$B_2 = 0.22;$$

- Parametri relativi alla Magic Formula

$$a_1 = -0.00005 \text{ N}^{-1}, a_2 = 1, a_3 = 50 \text{ KN}, a_4 = 4 \text{ KN};$$

dai quali deriva il seguente valore:

$$k = 6.5;$$

- Parametri aerodinamici:

$$\rho = 1.225 \text{ Kg/m}^3, S = 1.8 \text{ m}^2, C_x = 0.32.$$

3.2 Prove sul veicolo

L'analisi del modello senza differenziale è stata condotta valutando il comportamento del veicolo nelle tre prove classiche $u = \text{cost}$, $\delta = \text{cost}$, ed infine $R = \text{cost}$.

3.2.1 Manovra a $u = \text{cost}$

Per analizzare il comportamento del veicolo nel range di velocità di normale funzionamento, sono state condotte quattro prove ad $u = \text{cost}$, rispettivamente a 5.56 m/s , 10 m/s , 20 m/s e 30 m/s ; per ciascuna di queste prove è stato fissato il valore della velocità longitudinale, oltre ai normali parametri, ed è stato fatto variare l'angolo di sterzo all'interno di un range di valori compreso tra 0° e 6° .

Si è scelto questo range perchè, operando con valori superiori ed avvalendosi delle equazioni (1.1), si otterrebbero angoli di deriva eccessivamente elevati ($\alpha > 4^\circ$), cioè tali da far cadere le ipotesi di linearità del pneumatico. Ciò che è stato fatto per analizzare il comportamento del veicolo è stato partire dai valori delle tre variabili (q/u , v , r) ottenuti di volta in volta dal sistema dinamico al variare dell'angolo di sterzo, per ottenere i valori delle principali grandezze che caratterizzano il modello. Una volta noti quest'ultimi, è stato possibile costruire i grafici classici che sono alla base dello studio della dinamica del veicolo.

Per prima cosa si ricavano i valori degli angoli di deriva attraverso le equazioni (1.1), e successivamente quelli relativi all'accelerazione laterale a regime $\tilde{a}_y = ur$; note dunque queste due serie di valori, è possibile costruire adesso, punto per punto, l'*handling*

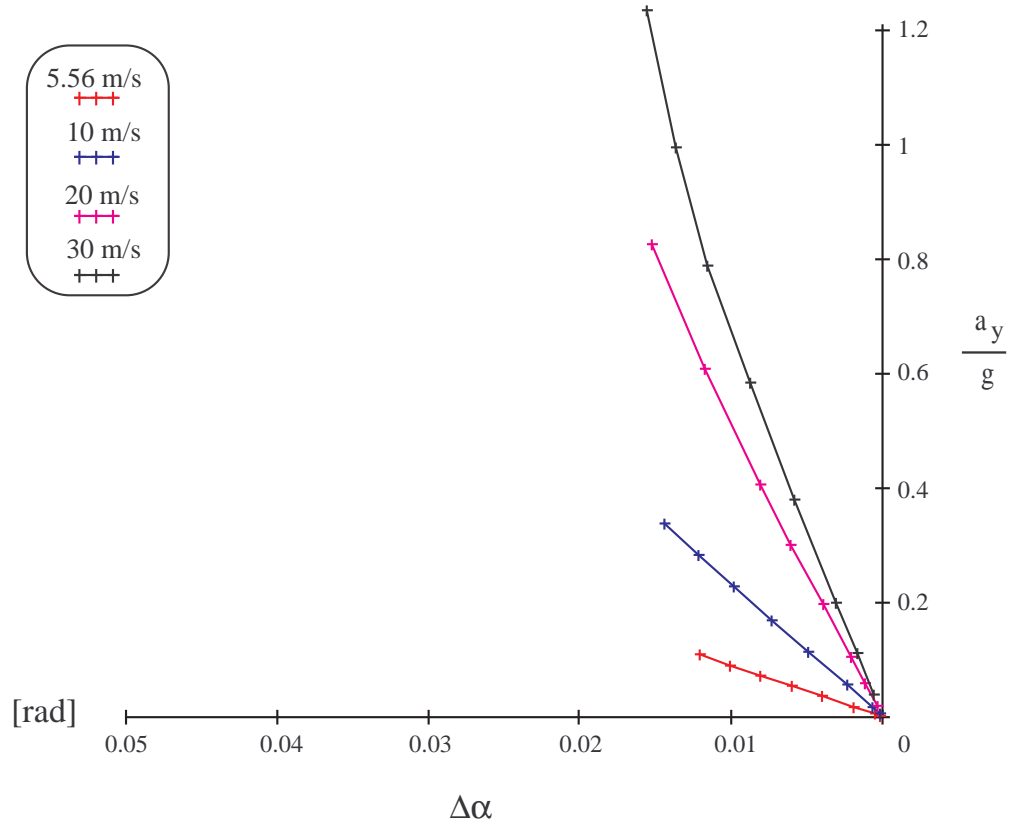


Figura 3.1: **Handling diagram relativo alla prova eseguita ad $u = cost$**

diagram (diagramma di maneggevolezza) rappresentato in Fig.3.1. Il grafico si riferisce alle quattro prove ad $u = cost$, già citate precedentemente, ciascuna delle quali è rappresentata da una curva, costruita unendo i punti del piano indicati dalle coppie di valori $(\tilde{a}_y/g, \alpha_1 - \alpha_2)$ ricavate nell'analisi. Come si può vedere, l'andamento delle curve rimane pressoché lineare solo alle basse velocità, mentre alle alte, si nota un andamento non lineare più marcato. Tutto questo è una conseguenza del fatto che il sistema dinamico risulta essere non lineare, a causa della presenza del termine q/u , anche se sono state scelte delle equazioni costitutive di tipo lineare per la descrizione del pneumatico. Osservando il grafico è possibile notare, inoltre, che tutte le curve passano per l'origine del sistema di riferimento, e questo vuol dire che, come per la teoria classica, si ha l'annullamento della differenza degli angoli di deriva al tendere di $\tilde{a}_y \rightarrow 0$.

Altri due grafici molto importanti per capire il comportamento del veicolo con differenziale bloccato, sono l'andamento dell'*angolo di assetto* β e del *momento d'imbardata* M_{z_2} , rispetto alla variazione dell'accelerazione laterale a regime. Per quanto riguarda il primo dei due grafici occorre fare una precisazione su ciò che viene rappresentato; infatti, poichè β è definito come

$$\beta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \simeq \frac{v}{u} \quad (3.1)$$

possiamo trarre, dalla seconda delle equazioni di congruenza (1.1), la seguente relazione

$$-\alpha_2 = \beta - \frac{a_2}{R}. \quad (3.2)$$

Convenzionalmente viene rappresentata la differenza $\beta - \beta_0$ (se con β_0 viene indicato il termine $\frac{a_2}{R}$), al posto del semplice valore di β , e di conseguenza si considera $-\alpha_2$ come rappresentativo della variazione dell'angolo d'imbardata del veicolo alle diverse condizioni cui è sottoposto. Analogamente a quanto fatto per la costruzione dell'handling diagram, anche in questo caso siamo riusciti ad ottenere le coppie di valori, necessarie per la costruzione per punti dei due grafici, partendo dalle soluzioni del sistema dinamico a regime e ricavando, successivamente, i valori delle grandezze dalle equazioni della teoria. Dall'analisi del grafico rappresentato in figura 3.3, si può notare come il momento d'imbardata parta da zero per poi crescere, nel campo dei valori negativi, all'aumentare dell'accelerazione laterale a regime. Il momento d'imbardata, infatti, risulta negativo perchè tende, con la sua azione, ad opporsi al momento responsabile della curvatura del veicolo ed indotto dalle forze scambiate a terra dai pneumatici. Occorre osservare, però, che alle alte velocità (30 m/s) l'andamento si inverte; infatti, giunti ad un valore limite (variabile da veicolo a veicolo), il momento d'imbardata tende a diminuire, in valore assoluto, e ad avvicinarsi al semipiano positivo. Tutto questo fa pensare che vi sia una particolare condizione dinamica oltre la quale il

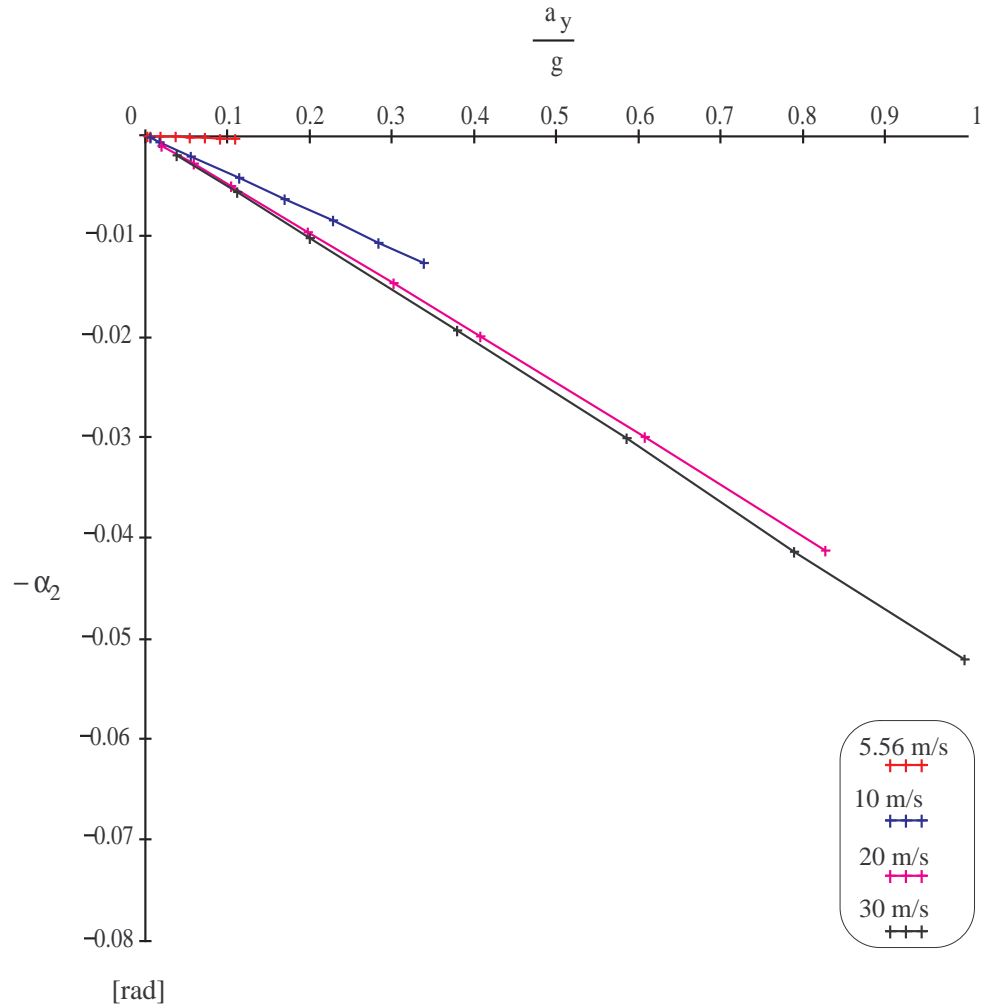


Figura 3.2: Andamento dell'angolo di assetto relativo alla prova ad $u = \text{cost}$

momento d'imbardata agisca a favore della curvatura, passando da negativo a positivo, e sommandosi, così, all'azione derivante dalle forze laterali scambiate a terra dei pneumatici. Parlando, più in generale, di tutte le forze a terra ed avvalendoci delle equazioni costitutive, (2.12) e (2.14), possiamo rappresentare, attraverso alcuni grafici, i loro andamenti rispetto a \tilde{a}_y . I due grafici di Fig. 3.4 e Fig. 3.5 rappresentano gli andamenti lineari delle forze laterali, rispettivamente dell'assale anteriore e posteriore, rispetto all'accelerazione laterale a regime, così come, lineari, sono anche le relazioni (2.12) che legano le forze laterali degli assali allo scorrimento. Per evidenziare gli andamenti delle forze longitudinali posteriori, che sono le uniche presenti, si ricorre ai

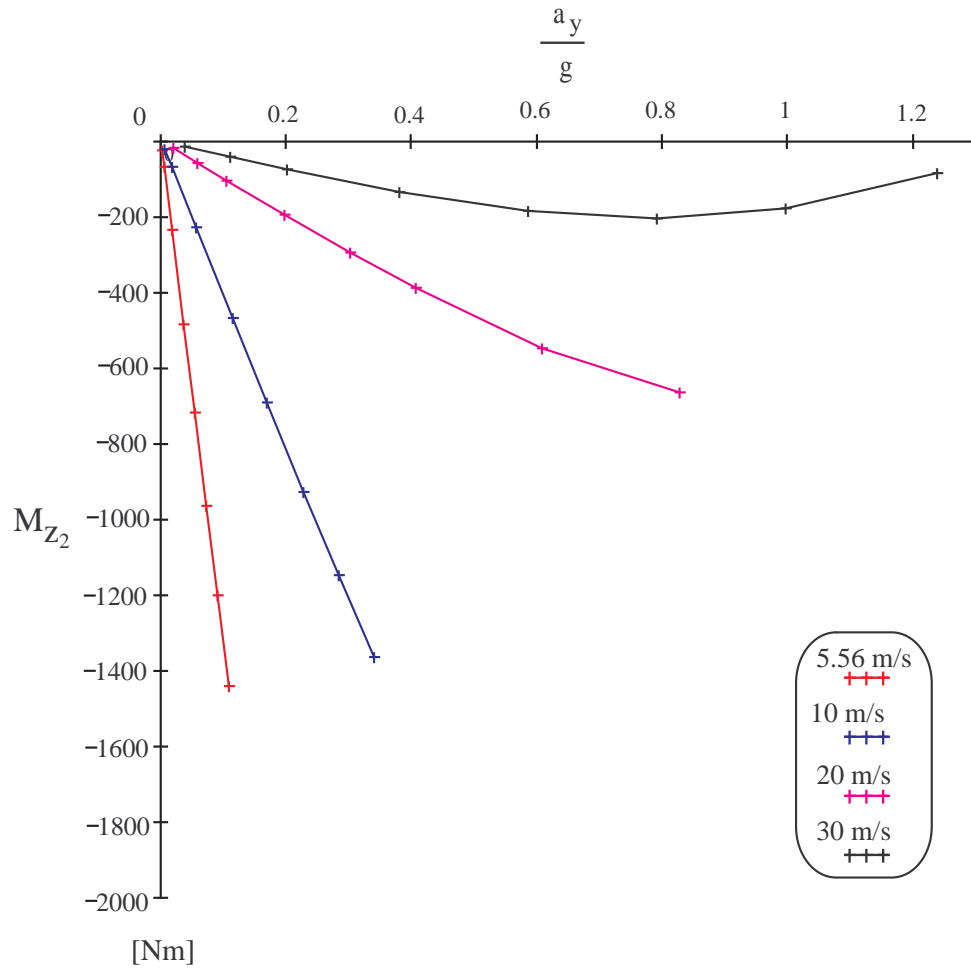


Figura 3.3: Andamento del momento d'imbardata relativo alla prova ad $u = \text{cost}$

grafici di Fig. 3.6 e di Fig. 3.7, che mettono in luce un diverso andamento tra le forze relative alle ruote dell'assale; infatti, all'aumentare dalla velocità di prova, si nota un carattere sempre più non lineare della forza longitudinale esterna alla curva, causato da fatto che, come verrà evidenziato in seguito, in queste condizioni il termine q/u diventerà predominante rispetto a $\frac{rt_2}{2u}$ e, di conseguenza, si avrà la forza longitudinale proporzionale all'inverso dell'accelerazione laterale.

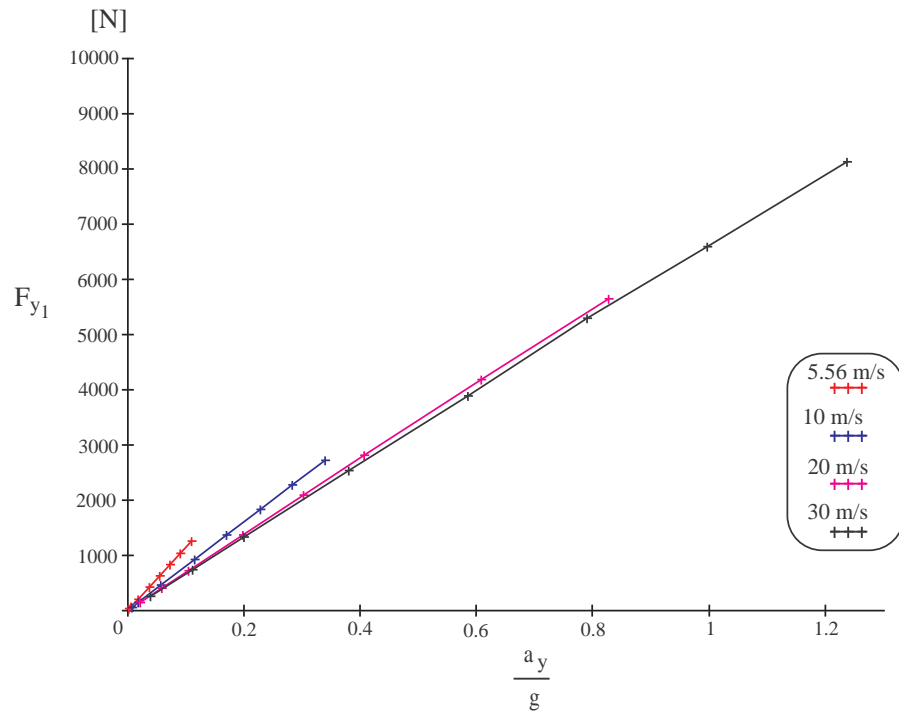


Figura 3.4: Andamento della forza laterale dell'assale anteriore relativo alla prova ad $u = cost$

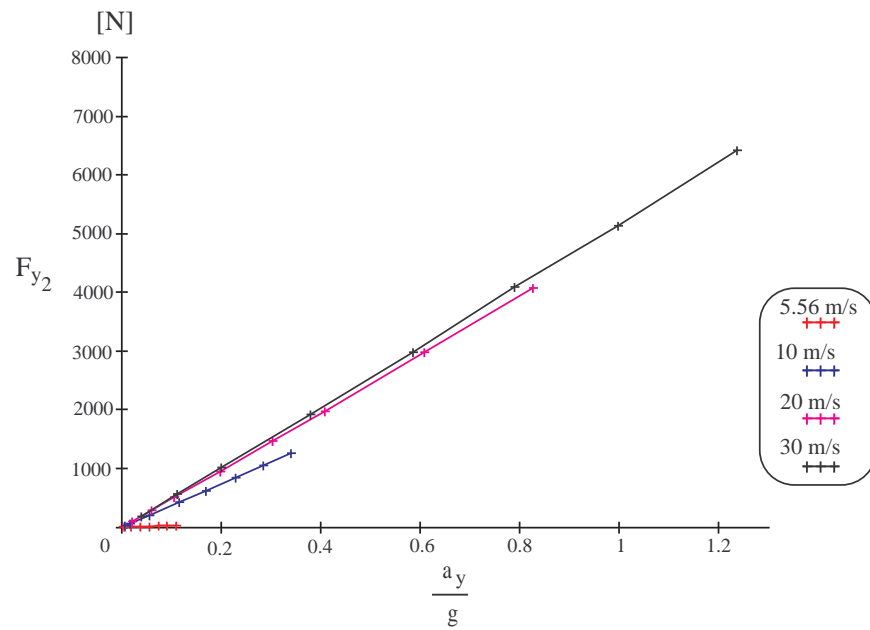


Figura 3.5: Andamento della forza laterale dell'assale posteriore relativo alla prova ad $u = cost$

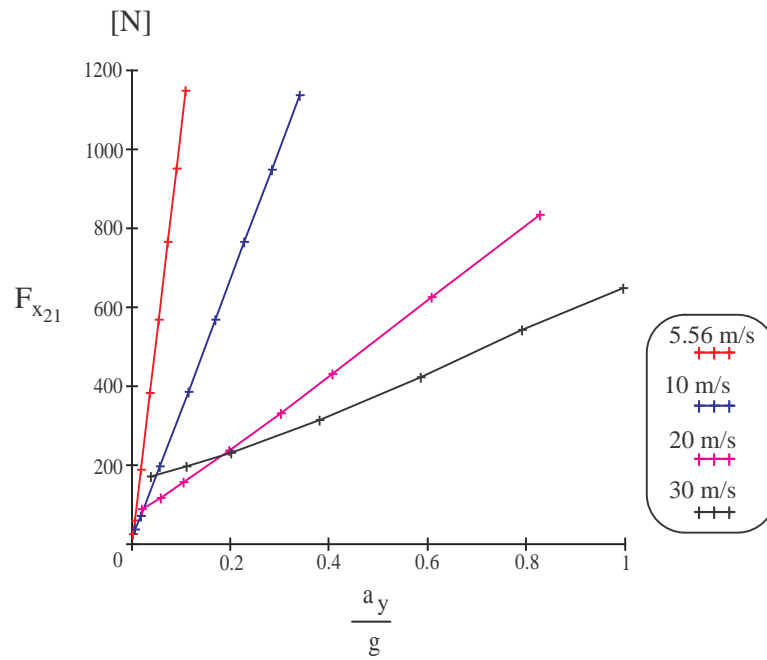


Figura 3.6: Andamento della forza longitudinali posteriore interna relativo alla prova ad $u = cost$

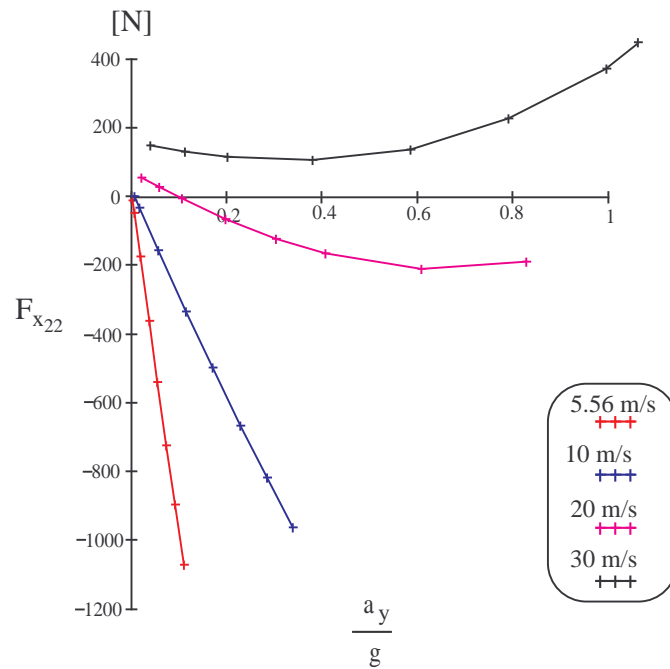


Figura 3.7: Andamento della forza longitudinali posteriore esterna relativo alla prova ad $u = cost$

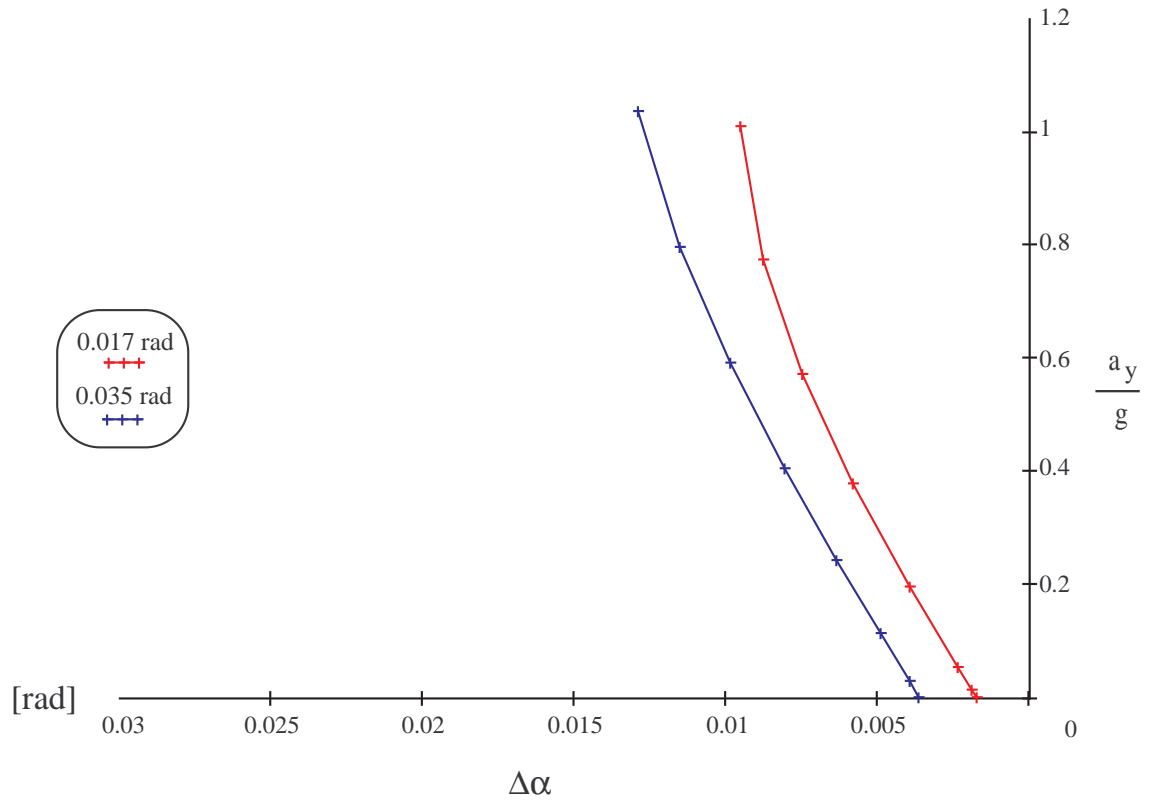


Figura 3.8: Handling diagram relativo alla prova eseguita ad $\delta = \text{cost}$

3.2.2 Manovra a $\delta = \text{cost}$

In questa seconda manovra la grandezza che viene mantenuta costante è l'angolo di sterzo δ , mentre facciamo variare la velocità longitudinale del veicolo u in un range compreso tra 1 m/s , e 60 m/s . Così come per la prova ad $u = \text{cost}$, anche in questo caso il range scelto è tale da non dar origine a valori elevati degli angoli di deriva che, altrimenti, violerebbero le ipotesi di linearità del pneumatico. Nel corso dell'analisi sono state eseguite due prove, rispettivamente a $\delta = 0.017 \text{ rad}$ (1°) e a $\delta = 0.035 \text{ rad}$ (2°), per le quali sono rappresentate, attraverso i grafici già citati nella prova a $u = \text{cost}$, le varie grandezze che caratterizzano il moto del veicolo. L'iter impiegato per il raggiungimento di quest'ultime, è sempre quello di partire dalle soluzioni del sistema dinamico a regime, per poi utilizzare le equazioni matematiche che definiscono

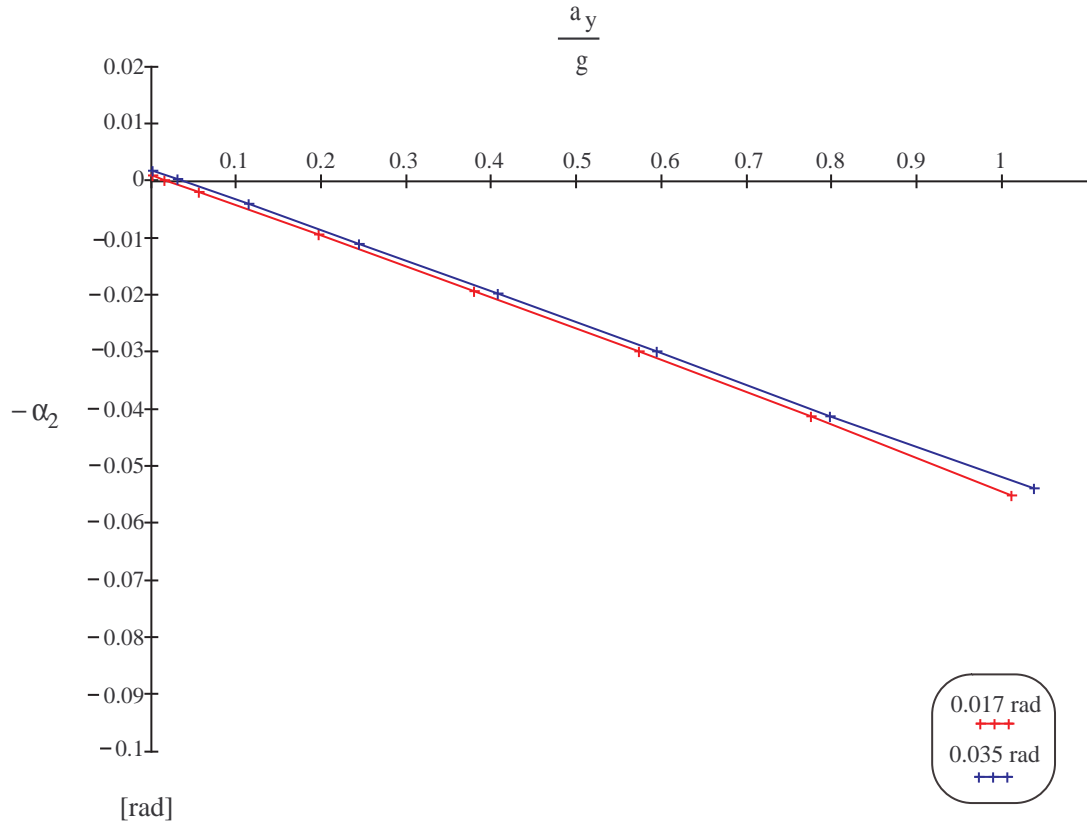


Figura 3.9: Andamento dell'angolo di assetto relativo alla prova ad $\delta = \text{cost}$

ciascuna grandezza.

Una grossa differenza, rispetto alla teoria classica, può essere evidenziata attraverso il grafico di Fig. 3.8, che rappresenta l'handling diagram per la prova a $\delta = \text{cost}$. Possiamo notare, infatti, che le curve non passano per l'origine del sistema di riferimento, come accade nel modello classico, ed inoltre, all'aumentare del parametro di prova si osserva uno spostamento della curva verso sinistra, ovvero verso valori più elevati della differenza dei degli angoli di deriva. In Fig. 3.9, ed in Fig 3.10 sono rappresentati i due andamenti, rispettivamente dell'angolo di assetto e del momento d'imbardata rispetto alla variazione dell'accelerazione laterale a regime. Per quanto riguarda il primo grafico si osserva, non solo una progressiva e lineare diminuzione del valore di $-\alpha_2$ rispetto ad \tilde{a}_y , che traduce il legame espresso in (3.2), ma anche una traslazione delle curve rappresentanti le due prove. L'andamento dell'angolo di assetto suggerisce in

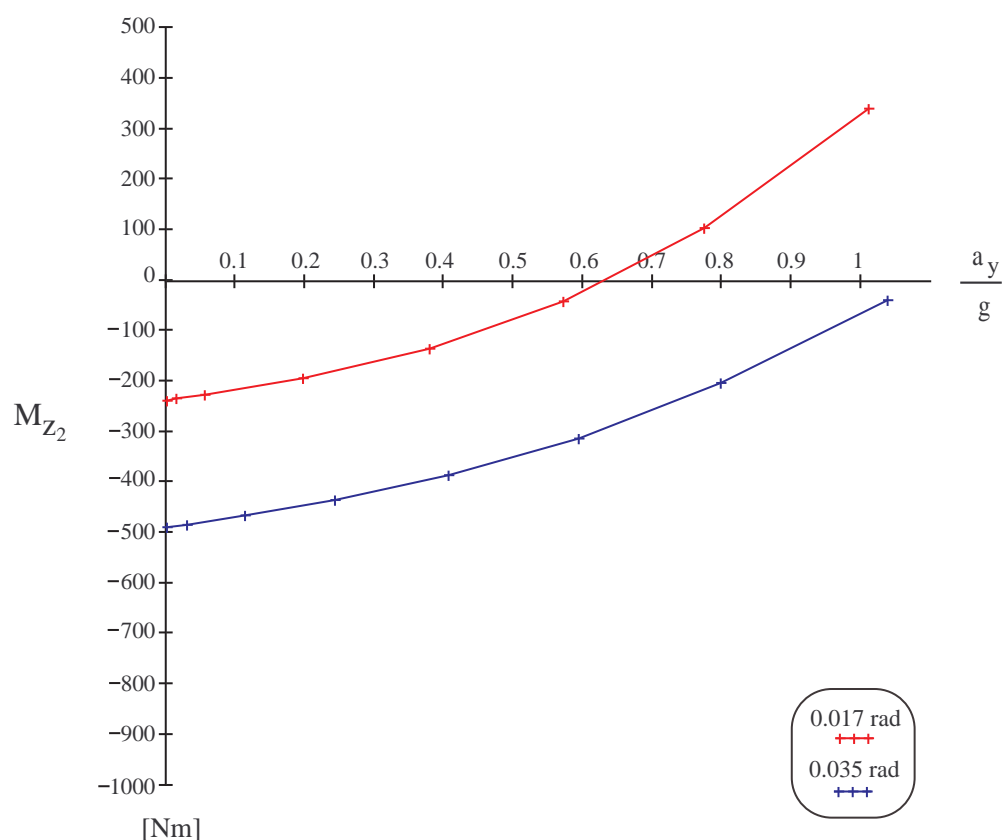


Figura 3.10: Andamento del momento d'imbardata per le prove ad $\delta = \text{cost}$

pratica, così come nella prova precedente, che più il valore della velocità longitudinale, e di conseguenza dell'accelerazione laterale, è elevato, più il rapporto tra v ed u diminuisce; in altri termini il vettore \mathbf{V}_g della velocità baricentrica, per una curvatura con traiettoria verso sinistra, tenderà progressivamente a spostarsi al di là del piano medio longitudinale del veicolo, verso l'esterno alla curva, determinando il passaggio di β a valori negativi. Passando al grafico relativo al momento d'imbardata si osserva, anche in questa prova, la tendenza a passare da valori negativi a valori positivi all'aumentare dell'accelerazione laterale; in pratica si conferma ciò che avevamo osservato precedentemente, ovvero che, superato un particolare valore dell'accelerazione laterale (variabile da prova a prova), l'azione del momento d'imbardata, prima contraria alla curvatura, diventa favorevole, inducendo nel veicolo, unitamente al contributo delle

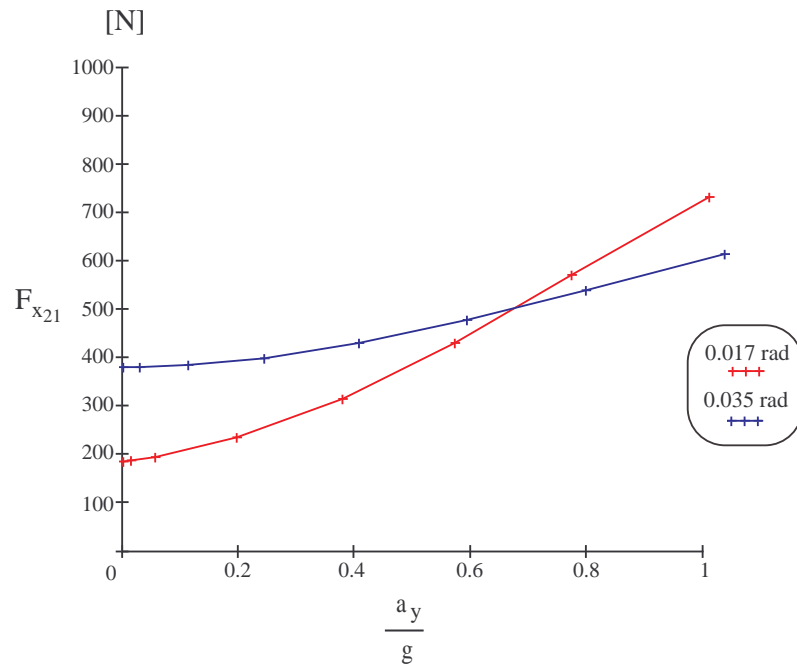


Figura 3.11: Andamento della forza longitudinale della ruota posteriore interna per le prove ad $\delta = \text{cost}$

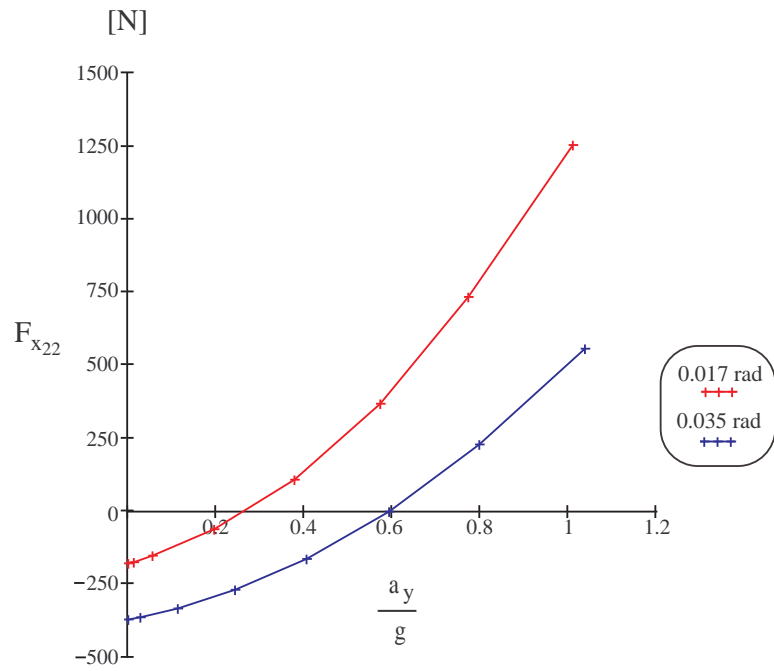


Figura 3.12: Andamento della forza longitudinale della ruota posteriore esterna per le prove ad $\delta = \text{cost}$

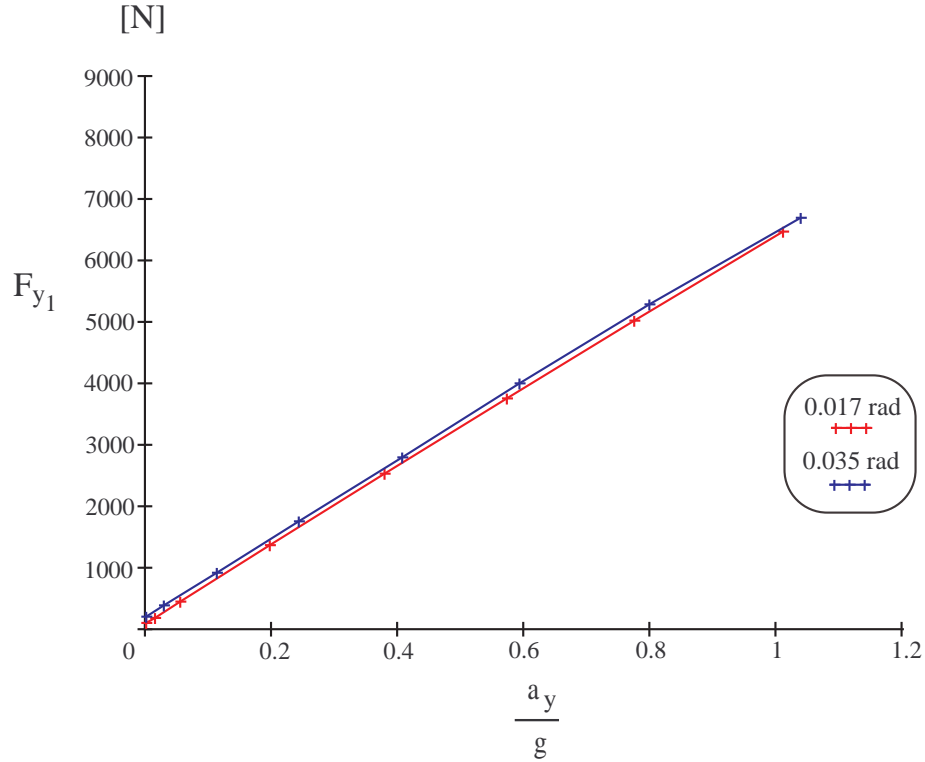


Figura 3.13: **Andamento della Forza laterale dell'assale anteriore relativa alla prova ad $\delta = \text{cost}$**

forze laterali, il passaggio dal comportamento sottosterzante a quello sovrasterzante. Un'altra osservazione può essere fatta sul valore assunto dal momento per $\tilde{a}_y \rightarrow 0$; infatti la prova inizia con il veicolo già in condizioni di equilibrio, ad un preciso valore dell'angolo di sterzo tanto che nasceranno, fin da subito, forze longitudinali sulle ruote posteriori tali da far assumere al momento d'imbardata un valore $\neq 0$.

È evidente come quest'ultimo rifletta l'andamento di tali forze, di cui è combinazione; infatti basta osservare i grafici di Fig. 3.12 per rendersi conto che la diminuzione, in termini di valore assoluto, del momento comincia proprio quando il valore della forza longitudinale della ruota esterna alla curva assumerà segno positivo, penalizzando così la differenza $F_{x22} - F_{x21}$. Avvalendoci ancora una volta delle relazioni (2.12), e sfruttando le soluzioni del sistema dinamico, possiamo ricavare gli andamenti sia della forza laterale dell'assale anteriore, che quella relativa all'assale posteriore. Rispetto ai grafici

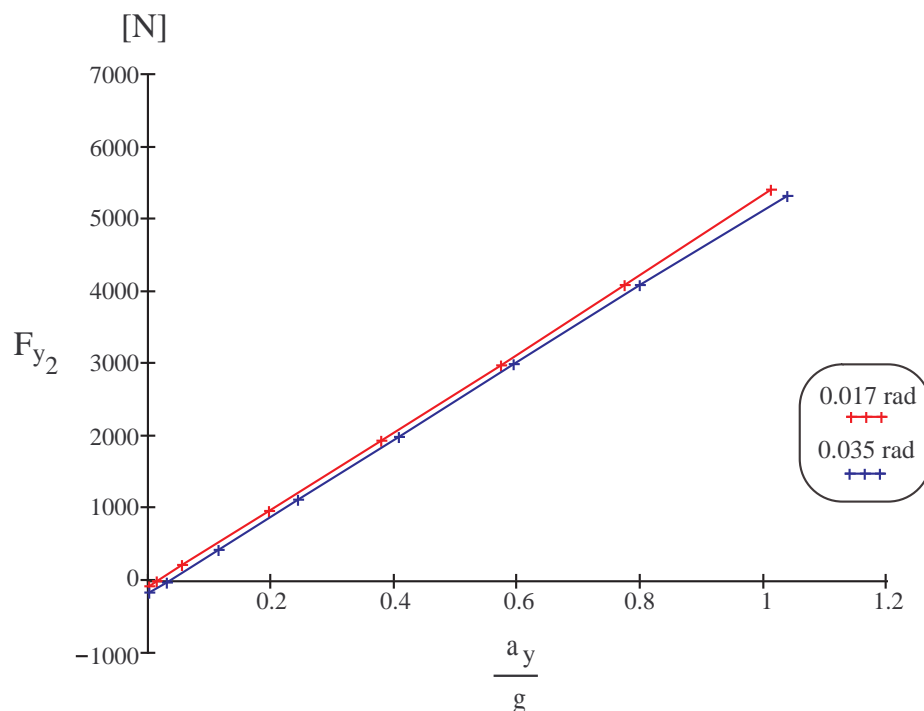


Figura 3.14: **Andamento della Forza laterale dell'assale posteriore relativa alla prova ad $\delta = \text{cost}$**

ottenuti per la prova a $u = \text{cost}$, questi ultimi permettono di comprendere meglio ciò che accade alle basse accelerazioni; infatti, come risulta dai grafici di Fig. 3.13 e Fig. 3.14, i segni delle due forze sono discordi ed in particolare la forza laterale dell'assale anteriore è positiva, mentre quella posteriore risulta negativa. Questo perchè, dovendo garantire l'equilibrio dell'intero veicolo, le due forze laterali sono chiamate ad equilibrare da un lato l'azione delle forza centrifuga agente sul veicolo e dall'altro l'azione raddrizzante del momento d'imbardata. Per questo motivo, essendo bassa l'accelerazione, e con essa anche la forza centrifuga, l'azione delle forze laterali di segno opposto tenderà a dare origine ad una coppia che equilibri, in pratica, solo il momento d'imbardata. Con l'aumento dell'accelerazione i valori delle forze laterali assumeranno segno positivo così da garantire l'equilibrio anche in presenza di un elevato valore della forza laterale applicata al baricentro.

3.2.3 Manovra a $R = \text{cost}$

L'ultima delle tre manovre classiche è quella ad $R = \text{cost}$, durante la quale si mantiene fisso il raggio di curvatura, facendo variare simultaneamente la velocità longitudinale del veicolo u e l'angolo di sterzo δ . L'unica complicazione dal punto di vista numerico sarà, una volta scelto R , trovare l'angolo di sterzo tale da far assumere alla soluzione della variabile r , al variare della velocità u , il valore dato dalla relazione $r = \frac{u}{R}$.

Si è deciso di eseguire due prove ad $R = \text{cost}$: la prima ad $R = 100 \text{ m}$, mentre la

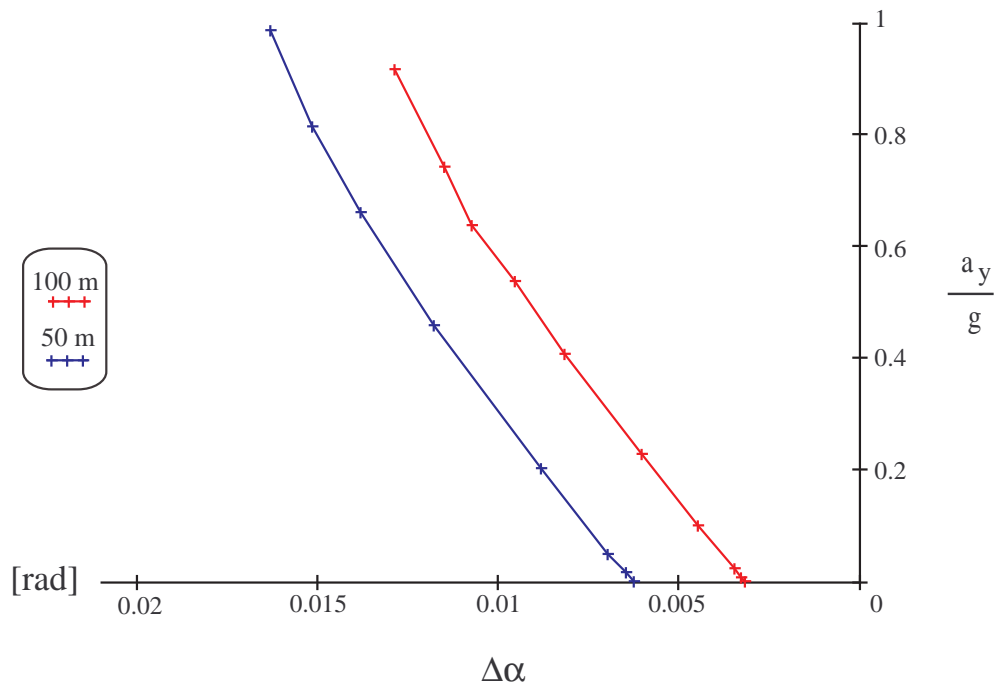


Figura 3.15: Handling diagram relativo alla prova eseguita ad $R = \text{cost}$

seconda a $R = 50 \text{ m}$; tra le due, quella che sollecita maggiormente il veicolo, considerando la stessa velocità longitudinale, è la seconda, in quanto, percorrendo un raggio di curvatura più piccolo, nascono delle accelerazioni laterali più elevate, e di conseguenza delle forze a terra più grandi. Quanto detto si riflette anche all'interno dell'handling diagram della prova, rappresentato in Fig. 3.15. In questo grafico si nota una traslazione della curva condotta per $R = 50 \text{ m}$ rispetto a quella per $R = 100 \text{ m}$ e tutto ciò è

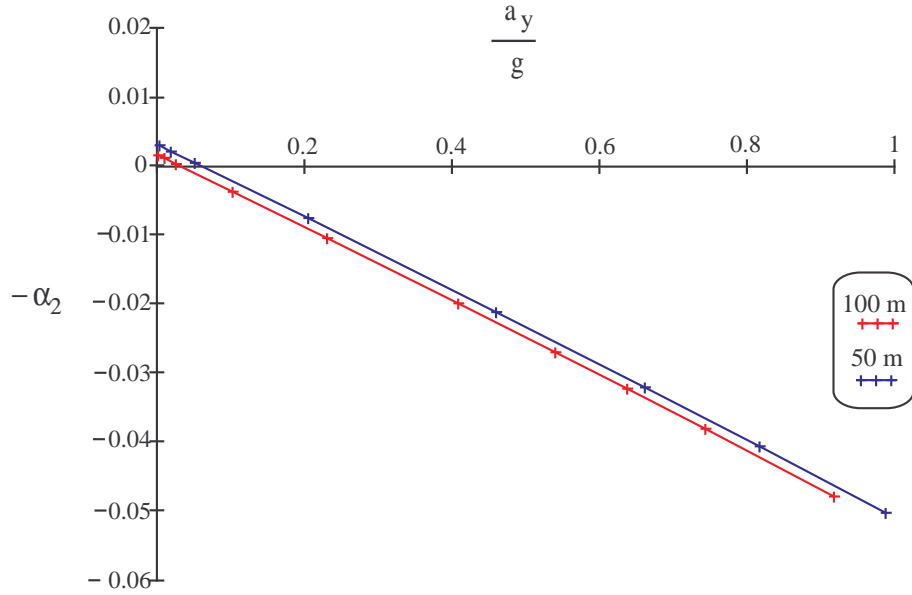


Figura 3.16: **Andamento dell'angolo di assetto relativo alla prova ad $R = \text{cost}$**

dovuto al fatto che, per raggiungere la solita accelerazione, nella prima prova basterà viaggiare a velocità u più bassa; inoltre ricordando che dalle (1.1) deriva

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \delta - \frac{v + ra_1}{u} + \frac{v - ra_2}{u} \\ &= \delta - \frac{a_1 + a_2}{u^2} \tilde{a}_y\end{aligned}$$

e che

$$\tilde{a}_y = ur$$

si osserva che se u è più bassa, allora r dovrà crescere per mantenere \tilde{a}_y allo stesso valore, ma per ottenere questo dalla risoluzione del sistema, occorrerà aumentare l'angolo di sterzo; ecco perchè si ha lo spostamento della curva verso valori di $\Delta\alpha$ maggiori. Analogamente a quanto fatto per le altre due prove nelle Fig. 3.16 e Fig. 3.20 vengono rappresentati gli andamenti dell'angolo di assetto e del momento d'imbardata del veicolo, al variare dell'accelerazione laterale a regime. Anche qui ritroveremo degli andamenti simili a quelli visti per la prova a $\delta = \text{cost}$, con la diminuzione lineare dell'angolo di sterzo e con la tendenza del momento d'imbardata a passare da valori

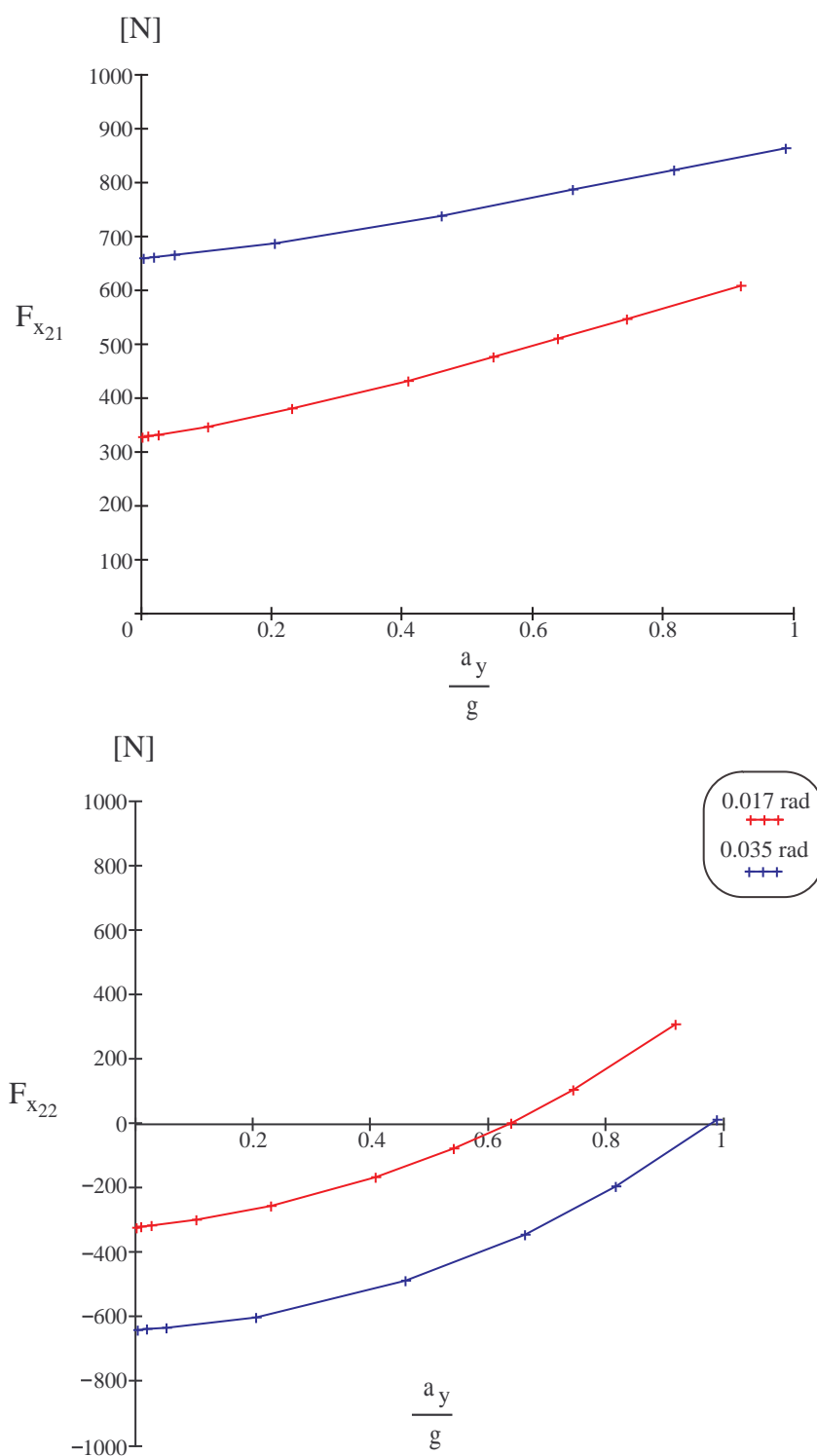


Figura 3.17: Andamento delle forze longitudinali delle ruote posteriori per le prove ad $R = \text{cost}$

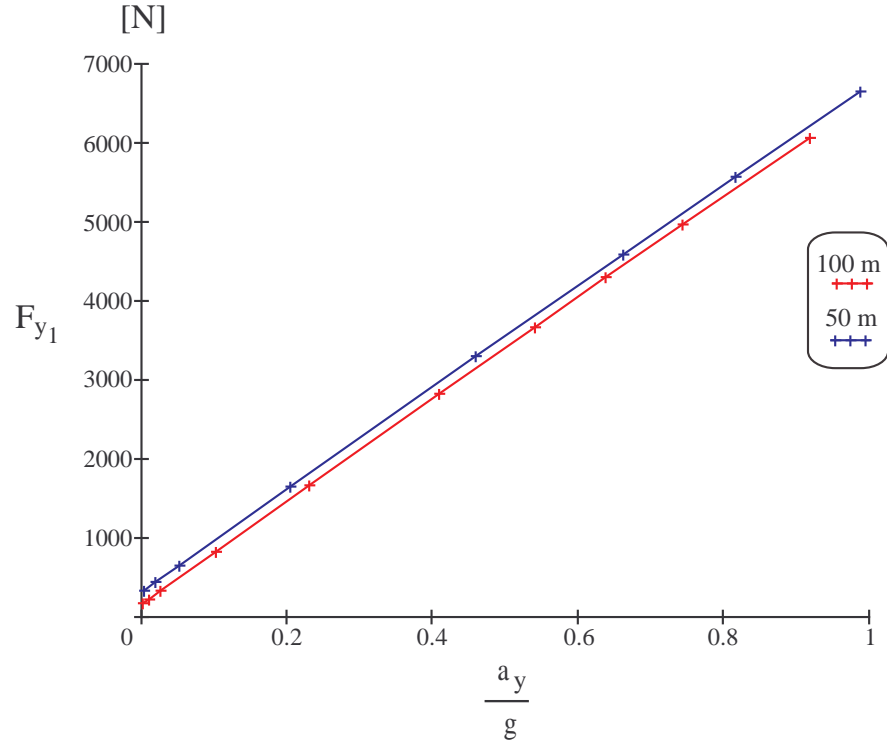


Figura 3.18: **Andamento della Forza laterale dell'assale posteriore relativa alla prova ad $R = \text{cost}$**

negativi a valori positivi. Inoltre è possibile notare come, anche in questo caso, il momento M_{z2} , per $\tilde{a}_y \rightarrow 0$, assuma un valore diverso da zero, determinato dal fatto che la prova inizia quando il veicolo è già a regime su di una traiettoria a raggio R imposto. Per concludere la prova ad $R = \text{cost}$ oltre a mostrare le due forze longitudinali posteriori, rappresentate nei grafici di Fig. 3.17, è necessario evidenziare, avvalendoci di Fig. 3.18 e Fig. 3.19, l'andamento delle forze laterali degli assali. Queste ultime, oltre a risultare linearmente crescenti rispetto all'accelerazione laterale a regime, mostrano, ai bassi valori di \tilde{a}_y segni opposti, necessari per garantire l'equilibrio dell'intero veicolo nelle fasi iniziali della prova, quando la forza centrifuga è di bassa intensità e l'unica azione da vincere è quella dovuta al momento d'imbardata.

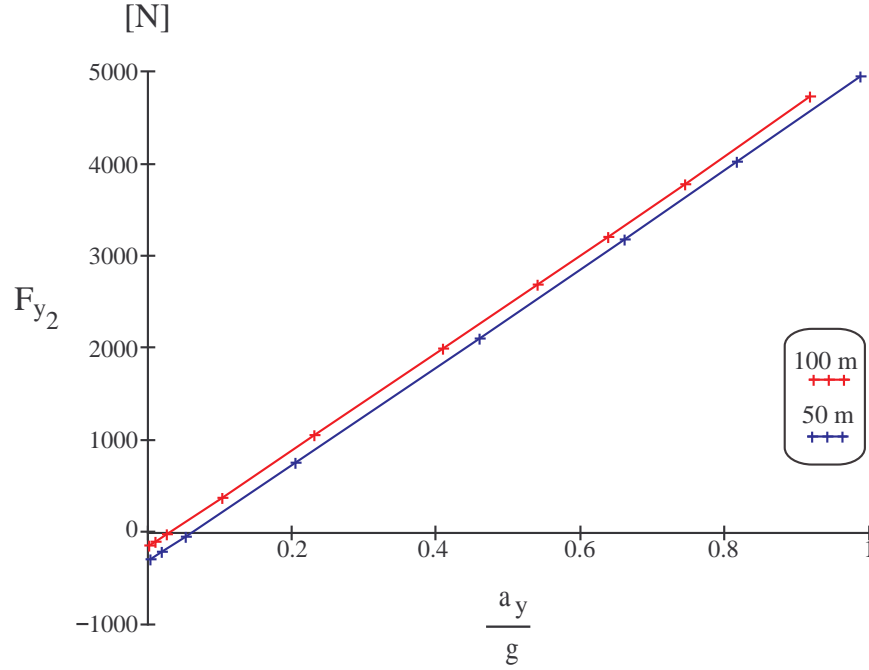


Figura 3.19: **Andamento della Forza laterale dell'assale posteriore relativa alla prova ad $R = \text{cost}$**

3.2.4 Andamento della variabile q/u

Senza dubbio uno degli aspetti che caratterizza maggiormente l'analisi, oltre alla presenza del momento M_{z_2} , è la comparsa nel sistema dinamico della variabile q/u . Quest'ultima, infatti, conferisce la caratteristica di non linearità all'intera trattazione pur considerando equazioni costitutive del pneumatico lineari. Come abbiamo evidenziato con l'espressione (2.18), il valore assunto da questa variabile è molto piccolo, anche se esistono, però, delle particolari condizioni in cui la sua presenza risulta essenziale per la determinazione dei valori di alcune grandezze fisiche come le forze longitudinali ed il momento d'imbardata. Per meglio comprendere quanto detto occorre vedere l'andamento non solo di q/u , ma anche del termine $\frac{rt_2}{2u}$ durante le varie prove; infatti le equazioni (2.14) mostrano le forze longitudinali posteriori come costituite da due termini, il primo differenza di due grandezze dello stesso ordine, mentre il secondo dipendente dal valore assunto nelle prove, sia da q/u che da $\frac{rt_2}{2u}$.

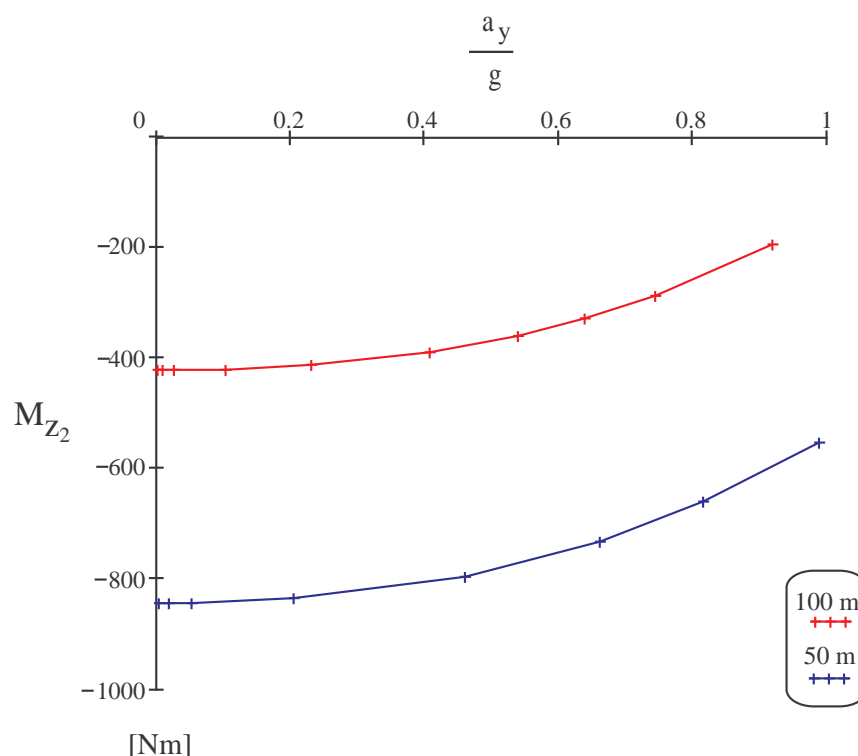


Figura 3.20: Andamento del momento d'imbardata per le prove ad $R = \text{cost}$

Esempi relativi alle tre prove classiche

I grafici di seguito riportati mostreranno un confronto, durante le varie prove, tra gli andamenti dei due termini citati, i quali sono diagrammati sia rispetto all'accelerazione laterale a regime, che rispetto alla grandezza caratteristica variabile nella prova. La prima presa in esame è quella ad $u = \text{cost}$, ed in particolare si osserva la differenza tra gli andamenti delle due grandezze al variare della velocità longitudinale; verranno presi come valori di prova per u , 10 m/s e 20 m/s . Per la prova a 10 m/s , rappresentata in Fig. 3.21, si osserva un'evidente superiorità del termine $\frac{rt_2}{2u}$ rispetto a q/u fin da valori bassi dell'accelerazione laterale, e dell'angolo di sterzo, mentre nella seconda prova, evidenziata in Fig. 3.22, si osserva un'innalzamento della curva caratteristica di q/u , che risulta così superiore rispetto all'altra fino ad 1 m/s^2 , per poi ritornare ad essere inferiore.

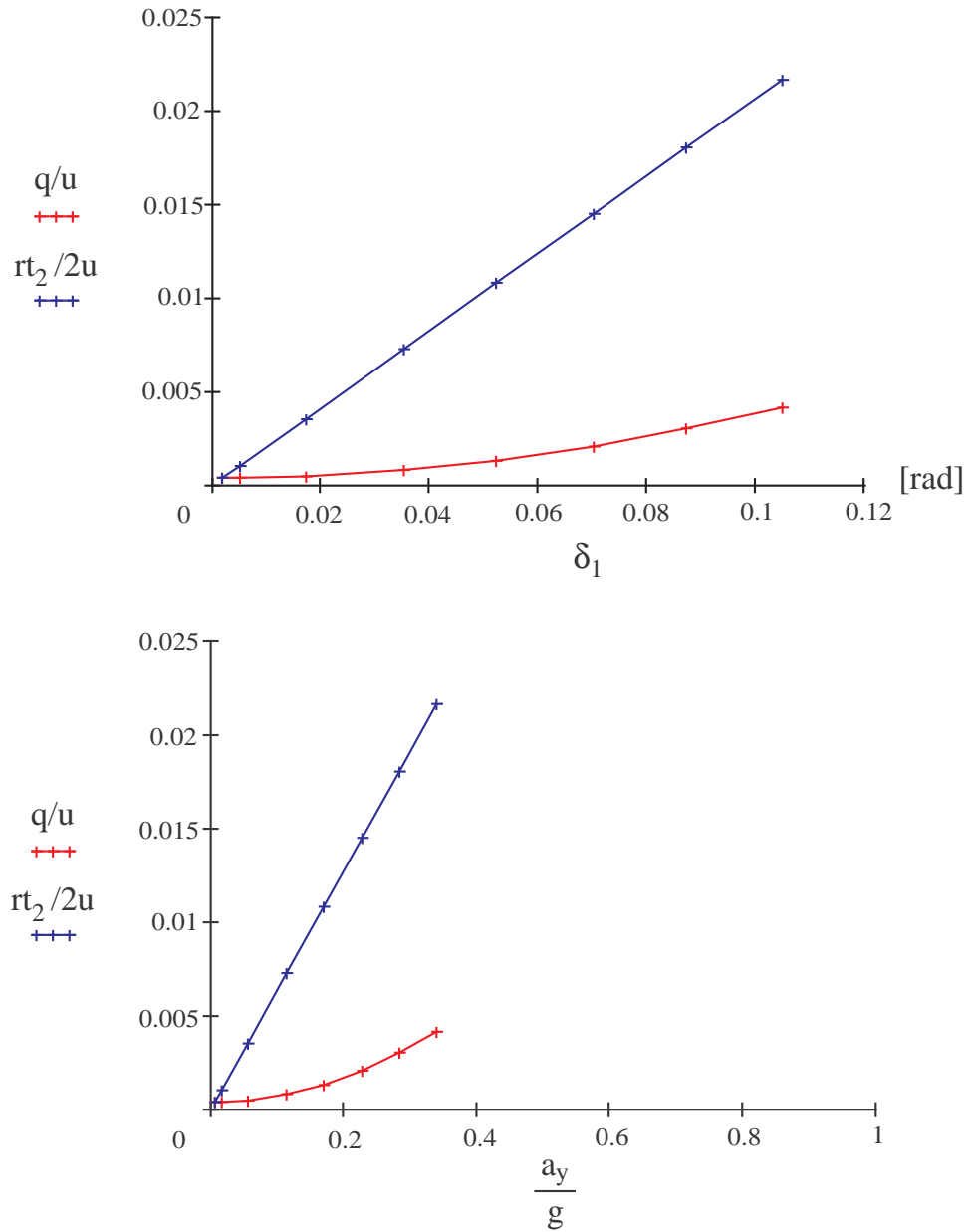


Figura 3.21: Confronto tra q/u e $\frac{rt_2}{2u}$ per una prova ad $u = 10$ m/s

La prova successiva, vale a dire quella ad angolo di sterzo δ costante, mostra in modo ancora più chiaro quanto detto sopra, valutando gli andamenti dei due termini al passaggio da $\delta = 0.017$ rad a $\delta = 0.035$ rad e diagrammando quest'ultime in funzione dell'accelerazione laterale a regime e della velocità u (Fig. 3.23 e Fig. 3.24).

L'ultima prova, eseguita per $R = 100$ m ed $R = 50$ m, ha un andamento apparen-

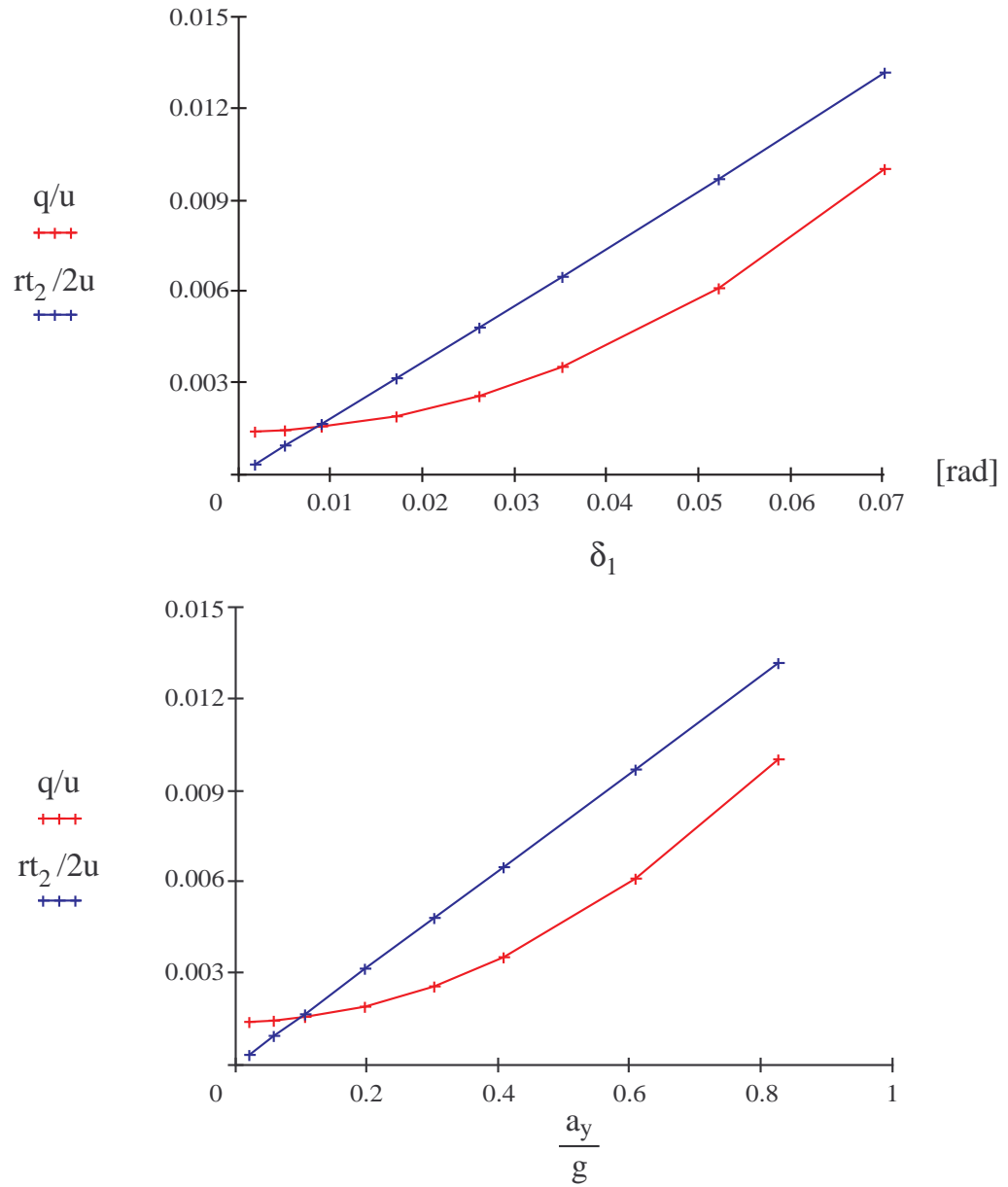


Figura 3.22: Confronto tra q/u e $\frac{rt_2}{2u}$ per una prova ad $u = 20$ m/s

temente diverso dalle altre due, visto che, data la definizione di raggio di curvatura $R = \frac{u}{r}$, il termine $\frac{rt_2}{2u}$ rimane costante; in realtà quello che si nota è che, spostandosi verso raggi di curvatura maggiori, q/u tende a superare il secondo termine a valori più bassi, anche se la velocità longitudinale e l'accelerazione laterale, a cui ciò avviene, aumentano.

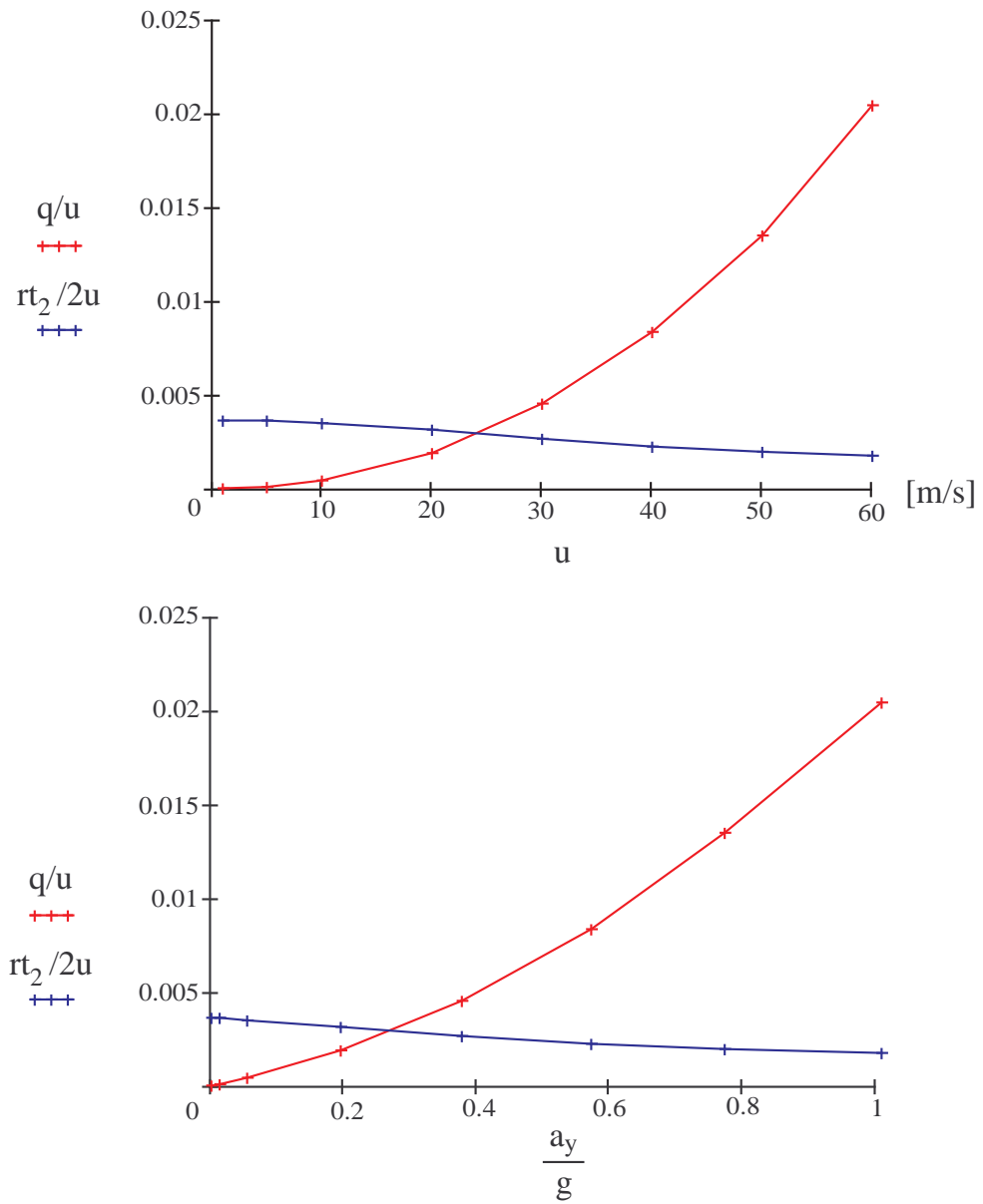


Figura 3.23: Confronto tra q/u e $\frac{rt_2}{2u}$ per una prova ad $\delta = 0.017$ rad

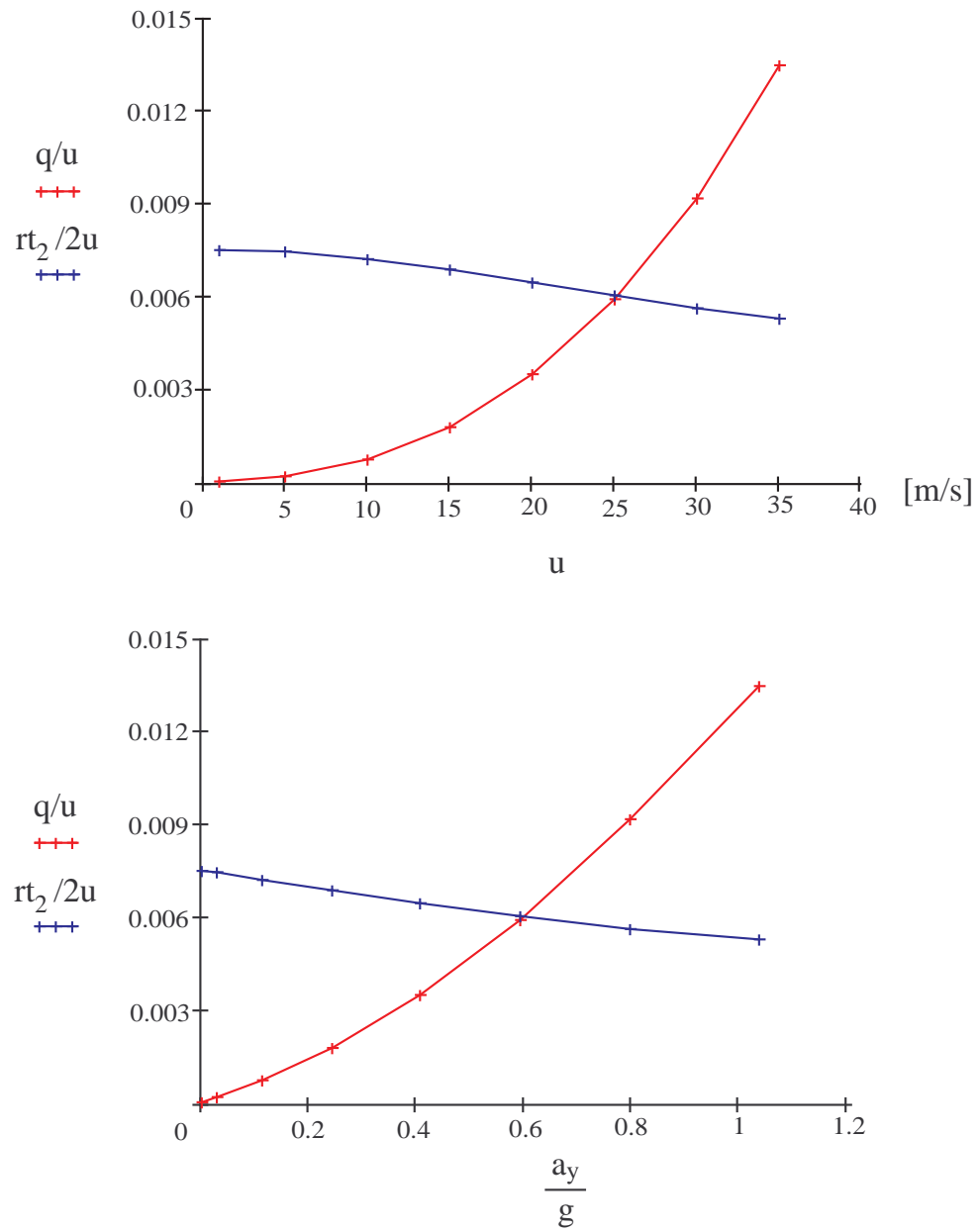


Figura 3.24: Confronto tra q/u e $\frac{rt_2}{2u}$ per una prova ad $\delta = 0.035$ rad

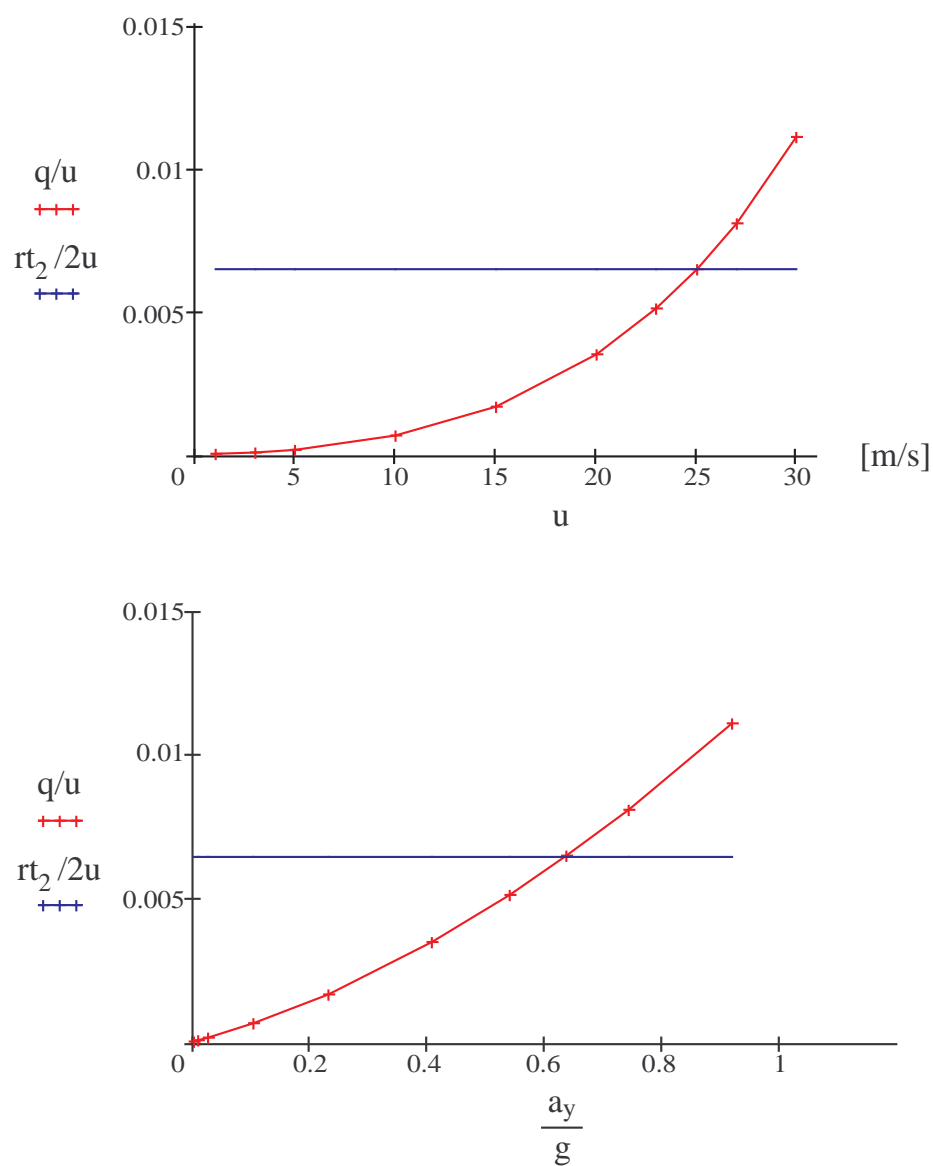


Figura 3.25: Confronto tra q/u e $\frac{rt_2}{2u}$ per una prova ad $R = 100$ m

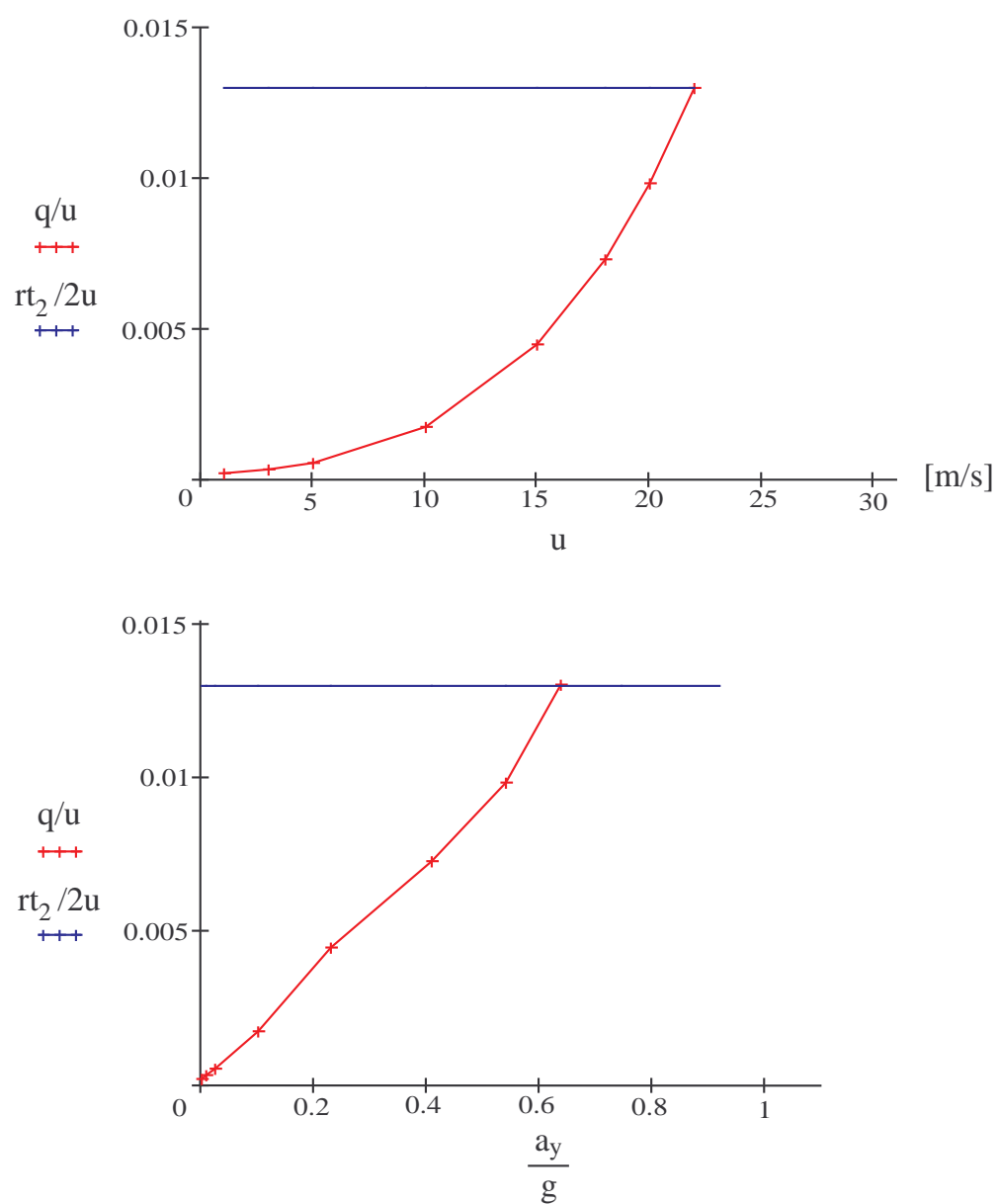


Figura 3.26: Confronto tra q/u e $\frac{rt_2}{2u}$ per una prova ad $R = 50$ ms

Capitolo 4

Analisi con pneumatico non lineare

Così come è stato fatto per l'analisi lineare, anche in questo caso, si rende necessario definire quelle che sono le equazioni costitutive del nuovo modello.

4.1 Equazioni costitutive

Riuscire a descrivere il comportamento *non lineare* del pneumatico, nella sua interezza e corrispondenza con la realtà, risulta piuttosto difficile, anche a causa dei molteplici fenomeni che nascono a seguito della complessità costruttiva di quest'ultimo. Tuttavia è possibile approssimare, attraverso funzioni opportune, il legame tra le forze scambiate a terra dagli stessi pneumatici e le due grandezze di riferimento: lo scorrimento teorico ed il trasferimento di carico. Partendo dal generico legame

$$\mathbf{F} = -\frac{\vec{\sigma}}{\sigma} f(\sigma, \pm \Delta F_z)$$

si è scelto, anche in questo caso, di utilizzare la *Magic Formula*¹ per rappresentare

¹Già introdotta durante l'analisi con pneumatico lineare e per la cui definizione si rimanda sempre a [10]

la funzione $f(\sigma, \pm\Delta F_z)$, e permettere, successivamente, di specificare ciascuna forza a terra attraverso le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} F_{x_{ij}} &= \frac{\sigma_{x_{ij}}}{\sigma_{tot_{ij}}} f(\sigma_{tot_{ij}}, \pm\Delta F_{z_i}) \\ F_{y_{ij}} &= \frac{\sigma_{y_{ij}}}{\sigma_{tot_{ij}}} f(\sigma_{tot_{ij}}, \pm\Delta F_{z_i}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove con $\sigma_{tot_{ij}}$ si è indicato il modulo del vettore scorrimento teorico, definito dalla relazione seguente:

$$\sigma_{tot_{ij}} = \sqrt{\sigma_{x_{ij}}^2 + \sigma_{y_{ij}}^2}.$$

La principale differenza rispetto all'analisi *lineare* sta nel fatto che, in questo caso, è stata impiegata l'intera espressione della funzione $f(\sigma, \pm\Delta F_z)$ ottenuta con la Magic Formula, e non la sua linearizzazione. Questo, oltre a consentire di estendere il campo di validità delle soluzioni (gli angoli di deriva non dovranno più essere necessariamente piccoli), porta, inevitabilmente, anche una maggiore complessità analitica, visto che, oltre alla non linearità introdotta dal termine q/u , vi è quella legata alle equazioni costitutive del pneumatico.

Scrivendo nuovamente l'espressione completa della Magic Formula

$$y(x) = D \sin \left(C \arctan(Bx - E[Bx - \arctan(Bx)]) \right) \quad (4.2)$$

si fa assumere, questa volta, alla variabile libera x il significato di scorrimento teorico totale(σ_{tot}), mentre con y si indica ancora la forza tangenziale scambiata a terra dal pneumatico.

Di enorme importanza, come nel caso lineare, è la scelta di valori opportuni da assegnare ai parametri della Magic Formula. Quest'ultimi sono i responsabili dell'andamento della funzione $f(\sigma, \pm\Delta F_z)$, che dovrà essere simile a quello riportato in Fig.4.1,

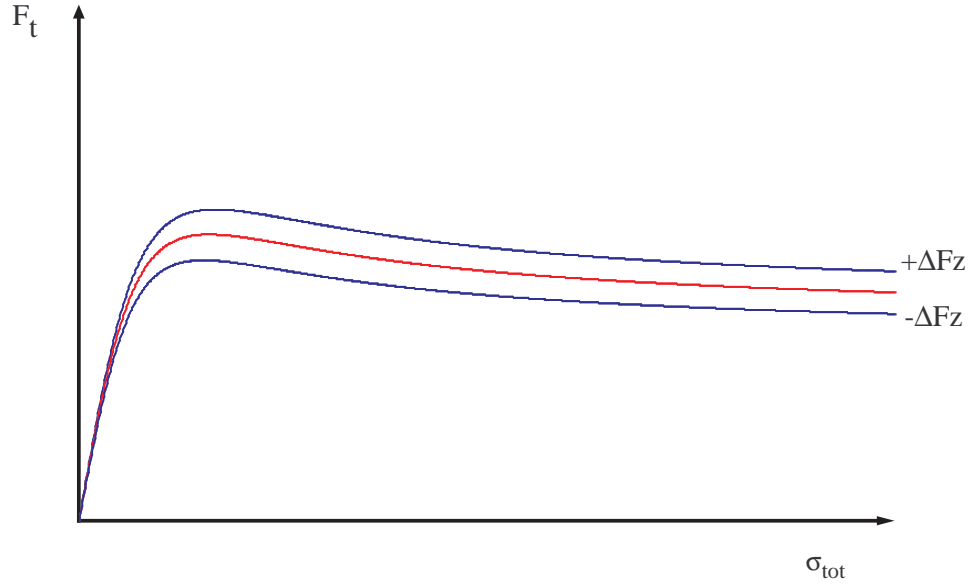


Figura 4.1: **Forza tangenziale in funzione dello scorrimento teorico al variare del carico verticale**

dove, oltre ad un evidente andamento non lineare, si assiste, a parità del valore dello scorrimento, ad una crescita meno che proporzionale da parte della forza tangenziale all'aumentare del carico verticale.

Per rendere più chiara la trattazione che seguirà, vengono scritte le equazioni caratteristiche, necessarie per la definizione dei principali parametri della Magic Formula. Con il parametro D (*peak value*) si indica il massimo valore assunto dalla funzione $y(x)$, definito come:

$$D_{ij} = \mu F_{z_{ij}} = (a_1 F_{z_{ij}} + a_2) F_{z_{ij}}$$

dove $F_{z_{ij}}$ rappresenta il carico agente sulla generica ruota, mentre i termini a_1 ed a_2 sono necessari per definire il coefficiente di aderenza μ , in funzione del carico verticale; Avvalendoci dell'equazione 2.3, dove la forza F_z su ciascuna ruota viene scomposta nel carico statico più (o meno) il trasferimento di carico, otteniamo l'espressione completa del parametro D

$$D_{ij} = \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) (F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i}) \quad (4.3)$$

Con C (*shape factor*) ed E (*curvature factor*) vengono indicati i parametri che definiscono la forma e la curvatura di $y(x)$; il valore assunto dai due parametri, per l'analisi, è compreso all'interno dei seguenti range $E < 1$ e $1 < C \leq 2$, per i quali la funzione ha un *massimo relativo* per $x = x_m$, con $y(x_m) = D$. Il valore dell'ascissa x_m in cui si ha il massimo relativo si ottiene risolvendo la seguente equazione

$$Bx_m = \tan\left(\frac{\pi}{2C}\right)$$

dove con B (*stiffness factor*) si è indicato il parametro che viene usato normalmente per fissare la pendenza di $y(x)$ nell'origine. Avvalendoci ancora una volta della (2.3) possiamo, adesso, esprimere la forma completa del parametro

$$B_{ij} = \frac{a_3 \sin\left(2 \arctan\left(\frac{F_{zij}^0 \pm \Delta F_{zi}}{a_4}\right)\right)}{CD_{ij}} \quad (4.4)$$

dove si è indicato con a_3 il valore massimo raggiungibile dalla pendenza della funzione $y(x)$ nell'origine, quando l'argomento del seno è uguale a $\frac{\pi}{2}$, mentre con a_4 si è indicato il valore del carico sulla ruota al quale si raggiunge la pendenza massima. Definite, adesso, le espressioni dei parametri della Magic Formula non resta altro che scrivere la formula completa della forza tangenziale F_t

$$\begin{aligned} F_t &= -\mathbf{s}f(\sigma, \pm\Delta F_z) \\ &= \left(a_1 \left(F_{zij}^0 \pm \Delta F_{zi}\right) + a_2\right) \left(F_{zij}^0 \pm \Delta F_{zi}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin\left(C \arctan\left(\frac{a_3 \sin\left(2 \arctan\left(\frac{F_{zij}^0 \pm \Delta F_{zi}}{a_4}\right)\right)}{C \left(a_1 \left(F_{zij}^0 \pm \Delta F_{zi}\right) + a_2\right) \left(F_{zij}^0 \pm \Delta F_{zi}\right)}\right)\sigma\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove si è indicato con il simbolo \mathbf{s} il versore dello scorrimento teorico, evidenziando così ancora una volta, che la forza tangenziale scambiata a terra dai pneumatici è sempre

diretta nel verso opposto rispetto al vettore scorrimento.

Prima, però, di determinare l'espressione completa delle equazioni costitutive per ciascun pneumatico, è opportuno precisare, che, a differenza del caso lineare, stavolta dobbiamo prendere in considerazione sia il trasferimento di carico, lungo l'assale anteriore, che quello lungo l'assale posteriore, i quali sono definiti, entrambi, dalla solita equazione (2.7), ma differiscono sia per il valore della rigidezza di rollio che per quello del carico statico verticale gravante su ciascun assale.

A questo punto non resta altro da fare che mettere insieme le equazioni precedenti, per ottenere, partendo dalla 4.1, le espressioni complete delle equazioni costitutive relative ad un pneumatico non lineare:

$$F_{x_{ij}} = \frac{\sigma_{x_{ij}}}{\sigma_{tot_{ij}}} \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) \cdot \sin \left(C \arctan \left(\frac{a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i}}{a_4} \right) \right)}{C \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right)} \right) \sigma_{tot_{ij}} \right) \quad (4.6)$$

$$F_{y_{ij}} = \frac{\sigma_{y_{ij}}}{\sigma_{tot_{ij}}} \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) \cdot \sin \left(C \arctan \left(\frac{a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i}}{a_4} \right) \right)}{C \left(a_1 \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right) + a_2 \right) \left(F_{z_{ij}}^0 \pm \Delta F_{z_i} \right)} \right) \sigma_{tot_{ij}} \right) \quad (4.7)$$

Dopo aver definito le espressioni della forza longitudinale e della forza trasversale, scambiate a terra da ciascun pneumatico, resta solamente da risolvere il sistema dinamico a regime. Anche qui, come per in caso di pneumatico lineare, risulta difficile proseguire l'analisi per via teorica, troppo complessa data la non linearità del sistema. Si sceglie allora di procedere per via numerica, avvalendoci, anche questa volta, del

programma di calcolo *mathcad 2001 professional*, che consente di trovare le soluzioni procedendo per via iterativa. L'unica differenza sarà il tipo di risoluzione adottata dal programma; infatti, mentre nel caso di pneumatico lineare, la risoluzione era di tipo *analitico*, vale a dire che, per ogni prova svolta venivano mostrate tutte le soluzioni del sistema dinamico, nel caso di pneumatico non lineare, invece, la risoluzione è di tipo *numerico*, vale a dire che, per ciascuna prova, oltre a dover fissare le condizioni iniziali dalle quali far partire l'analisi, si riesce a trovare solamente la soluzione più vicina a tali valori. La differenza nei metodi risolutivi è da imputare all'elevata complessità di quest'ultimo modello, il quale oltre a conservare la non linearità dovuta al termine q/u , ne introduce un'altra attraverso le equazioni costitutive del pneumatico.

Capitolo 5

Analisi numerica per il caso con pneumatici non lineari

Come è stato evidenziato alla fine del capitolo precedente, l'analisi numerica a regime, del modello caratterizzato da pneumatico non lineare, verrà condotta attraverso l'uso dello stesso programma di calcolo impiegato nell'analisi con pneumatico lineare. Le incognite del sistema dinamico saranno ancora le tre grandezze q/u , v , r , con l'unica differenza che la loro determinazione avverrà per via *numerica* e non per via *analitica*, come avvenuto in precedenza.

Per poter cominciare l'analisi, si rende necessario definire, prima di tutto, il valore di alcune grandezze che costituiranno i dati del sistema dinamico.

5.1 Dati utilizzati per l'analisi

Per l'analisi abbiamo deciso di assumere i seguenti valori:

- Passo e semipassi:

$$l = 2.7m$$

$$a_1 = 1.2m, a_2 = 1.5m;$$

- Carreggiata:

$$t_1 = 1.3m$$

$$t_2 = 1.3m;$$

- massa del veicolo:

$$1200 \text{ Kg};$$

- Rigidezze di deriva:

$$\text{anteriori: } C_{x_1}^0 = C_{y_1}^0 = 40 \text{ KN/rad}$$

$$\text{posteriori: } C_{x_2}^0 = C_{y_2}^0 = 40 \text{ KN/rad};$$

- Rigidezze di rollio:

$$\text{anteriore: } K_{\phi_1} = 39750 \text{ Nm/rad}$$

$$\text{posteriore: } K_{\phi_2} = 35250 \text{ Nm/rad};$$

- Altezza da terra della traccia dell'asse di rollio in corrispondenza dei piani passanti per ciascun assale:

$$d_i = 0.03 \text{ m};$$

- Carico verticale statico gravante su ciascuna ruota :

$$\text{anteriori: } F_{z_{1j}} = 3200 \text{ N}$$

$$\text{posteriori: } F_{z_{2j}} = 2800 \text{ N}$$

- Il termine B_i avrà quindi il seguente valore:

$$\text{per il trasferimento di carico all'anteriore: } B_1 = 0.24$$

$$\text{per il trasferimento di carico all'anteriore: } B_2 = 0.22;$$

- Parametri relativi alla Magic Formula

$$a_1 = -0.00005 \text{ N}^{-1}, a_2 = 1, a_3 = 40 \text{ KN}, a_4 = 4 \text{ KN};$$

dai quali deriva il seguenti valore:

$$k = 6.5;$$

- Parametri aerodinamici:

$$\rho = 1.225 \text{ Kg/m}^3, S = 1.8 \text{ m}^2, C_x = 0.32.$$

5.2 Prove sul veicolo

L'analisi del modello senza differenziale, con pneumatici non lineari, verrà condotta valutando il comportamento dinamico del veicolo nelle tre prove classiche $u = \text{cost}$, $\delta = \text{cost}$, ed infine $R = \text{cost}$. Queste consentiranno di evidenziare i fenomeni caratteristici del modello, permettendone l'analisi, partendo da punti di vista differenti.

5.2.1 Manovra a $u = \text{cost}$

Per analizzare il comportamento del veicolo durante una manovra a velocità longitudinale costante, si è deciso di eseguire sei prove, in modo tale da considerare un ventaglio di condizioni di funzionamento che fosse il più ampio possibile. Le prove sono state eseguite, rispettivamente, a 2 m/s , 5 m/s , 10 m/s , 20 m/s , 30 m/s e 40 m/s . Per eseguire ciascuna prova, oltre a fissare i valori dei diversi parametri e, ovviamente della velocità u , si è fatto variare l'angolo di sterzo all'interno di un range che va da 0° fino a circa 15° , fatta eccezione per la prova eseguita a 2 m/s , dove si è considerato, come limite superiore, un valore più grande (circa 40°). In questo caso abbiamo forzato le ipotesi che hanno condotto ad angoli di sterzo uguali, tra la ruota interna e quella esterna alla curvatura, ma solo per poter condurre l'analisi per valori dell'accelerazione laterale non eccessivamente bassi.

Anche per il caso di pneumatico non lineare ciò che è stato fatto, per esaminare il comportamento del veicolo, è stato partire dai valori delle tre variabili q/u , v , r , ottenuti di volta in volta dal sistema dinamico al variare dell'angolo di sterzo, per poi sostituirli all'interno delle espressioni matematiche delle principali grandezze che caratterizzano il modello. Una volta noti i valori di quest'ultime si è resa possibile la costruzione dei

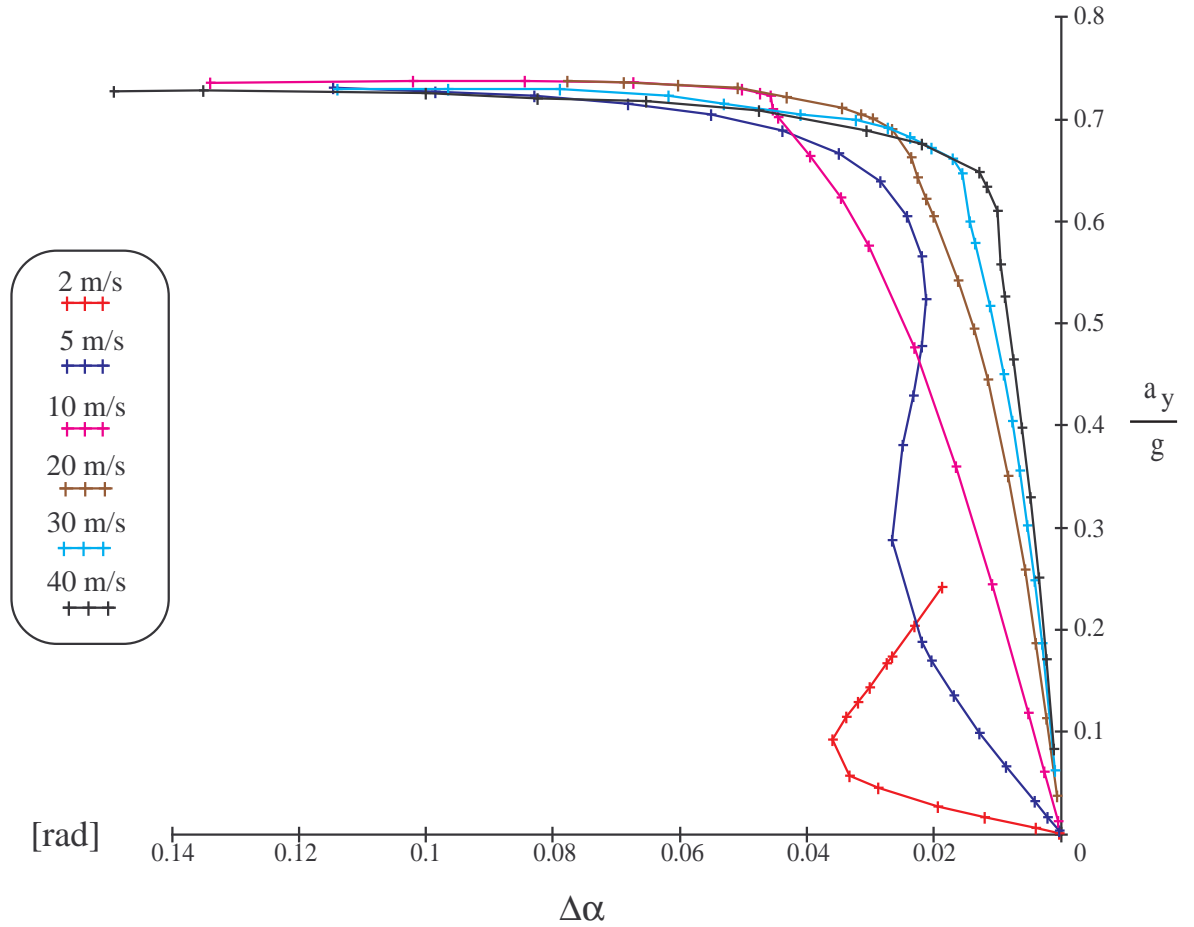


Figura 5.1: **Handling diagram** relativo alla manovra eseguita ad $u = cost$ nel caso di pneumatico non lineare

classici grafici che sono alla base dello studio della dinamica del veicolo.

Il primo grafico, mostrato in Fig. 5.1, rappresenta l'*handling diagram* (diagramma di maneggevolezza) relativo alla manovra $u = cost$, ed è stato costruito ricavando i valori degli angoli di deriva attraverso le equazioni (1.1), mentre quelli relativi all'accelerazione laterale a regime, mediante la seguente relazione $\tilde{a}_y = ur$. Osservando il grafico si nota immediatamente che l'andamento assunto dalle curve, oltre ad essere marcatamente non lineare, risulta essere anche molto particolare; infatti, come si può vedere, il comportamento del veicolo, aumentando il valore dell'accelerazione laterale a regime, tende a passare da sottosterzante a sovrasterzante, per poi ritornare ad essere

nuovamente sottosterzante per alti valori dell'accelerazione laterale. Tutto questo è vero alle medie e basse velocità, perchè il caratteristico andamento ad s tende progressivamente a ridursi all'aumentare di u , fin quasi a sparire del tutto, facendo assumere così al veicolo un comportamento sottosterzante, indipendentemente dall'accelerazione laterale raggiunta.

L'andamento dell'handling diagram, per questo tipo di analisi, presenta quindi un'enorme differenza, non solo rispetto al caso di pneumatico lineare, ma anche rispetto al caso non lineare della teoria classica. Tale differenza si può riscontrare, anche, negli altri grafici di seguito riportati, come ad esempio l'andamento dell'angolo di assetto e l'andamento del momento d'imbardata, rispetto all'accelerazione laterale a regime.

Nel primo grafico, in realtà non verrà rappresentato l'andamento dell'angolo d'imbardata β , ma, in accordo con quanto fatto all'interno dell'analisi con pneumatico lineare, verrà mostrato l'andamento del termine $-\alpha_2$, ottenuto dalle (3.1) e (3.2), il quale rappresenterà la differenza $\beta - \beta_0$, convenzionalmente impiegata per la descrizione grafica dell'angolo di assetto.

Passando all'analisi dell'andamento dell'angolo di assetto, rappresentato in Fig. 5.2, si nota una progressiva diminuzione nei valori raggiunti, ad eccezione della prova a 2 m/s , dove si registra, invece, un iniziale aumento per bassi valori dall'accelerazione laterale. Questo fatto, unito all'elevato valore raggiunto dal momento d'imbardata (rappresentato in Fig. 5.3) sta ad indicare che in un veicolo con differenziale bloccato che viaggia a bassa velocità, l'azione del momento M_{z_2} penalizza fortemente la curvatura dello stesso, inducendo l'angolo di deriva posteriore ad assumere valori negativi, durante la prima parte della prova. Prima di continuare occorre fare due precisazioni: la prima è che gli andamenti, delle curve caratteristiche delle due grandezze, sono non lineari, per tutte le prove trattate, frutto, questo, della combinazione delle due non linearità, introdotte dal termine q/u e dalle equazioni costitutive; mentre la seconda precisazione riguarda la costruzione dei grafici; infatti analogamente a quanto fatto per l'handling diagram, anche in questo caso siamo riusciti ad ottenere le coppie di valori, necessarie

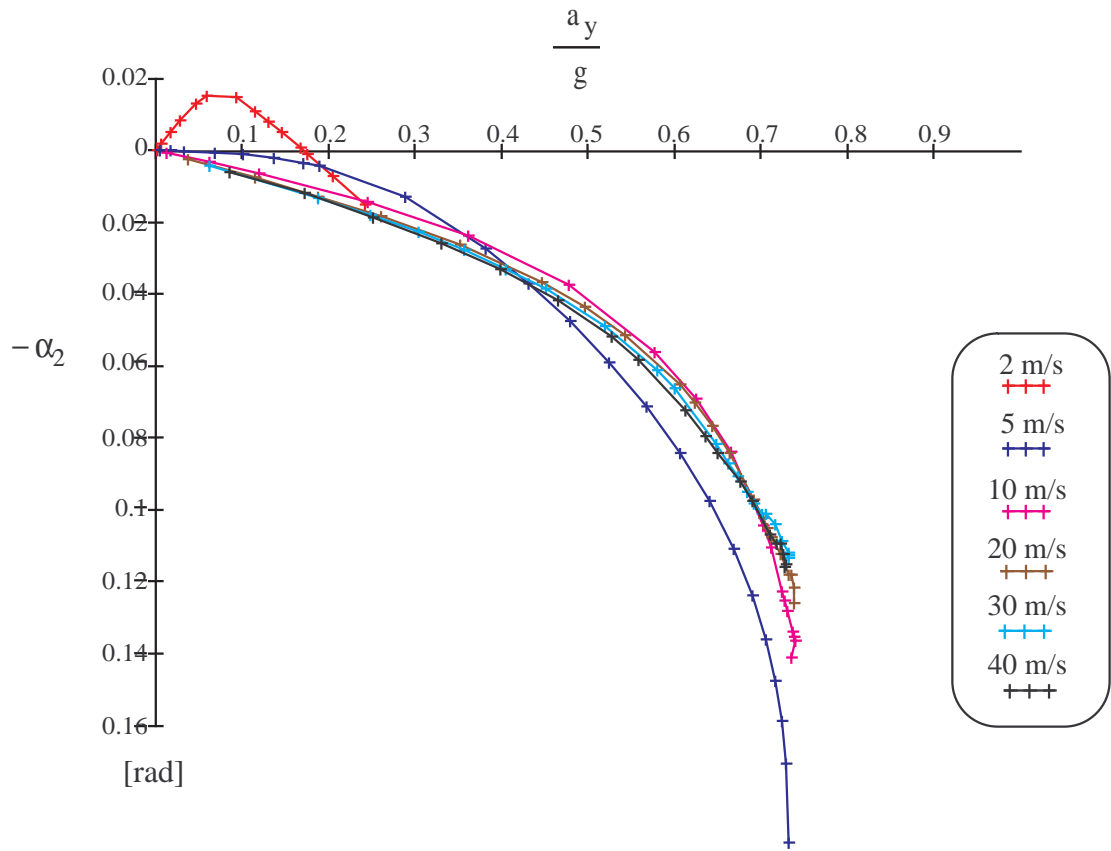


Figura 5.2: Andamento dell'angolo di assetto relativo alla manovra ad $u = \text{cost}$ nel caso di pneumatico non lineare

per la costruzione per punti dei due grafici, partendo dalle soluzioni del sistema dinamico a regime e ricavando, successivamente, i valori delle grandezze dalle equazioni della teoria.

L'andamento del momento d'imbardata può essere evinto anche dall'analisi delle Fig. 5.4 e Fig. 5.5 all'interno delle quali sono evidenziati gli andamenti delle due forze longitudinali posteriori. Il fatto che il momento M_{z_2} passi da valori negativi a valori positivi deriva dal segno assunto, durante le prove, proprio dalle forze longitudinali posteriori, ed in modo particolare la quella esterna alla curva. Quest'ultima, infatti, tende ad assumere valori positivi, alle alte velocità u , oppure, alle medie velocità, ma con accelerazioni laterali a regime piuttosto elevate. Tutto ciò conduce, inevitabilmen-

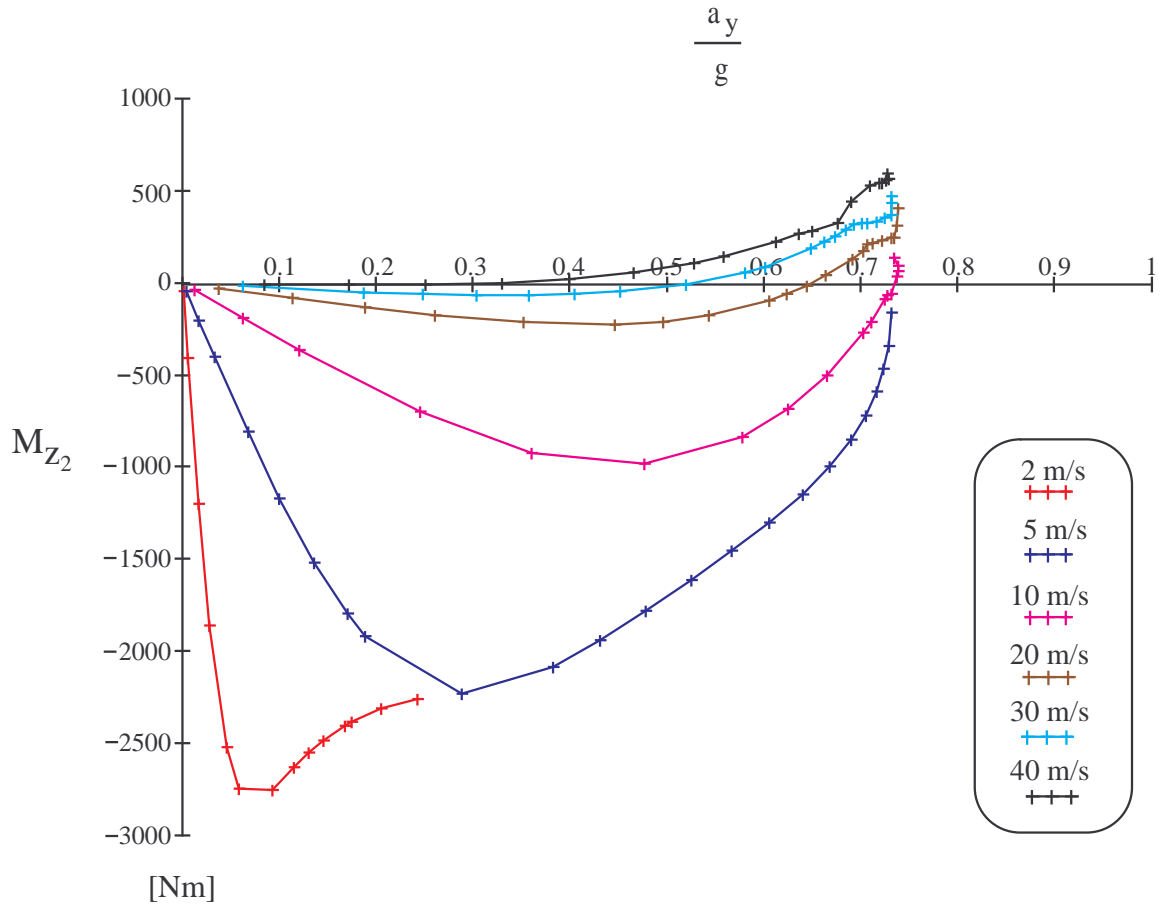


Figura 5.3: Andamento del momento d'imbardata relativo alla manovra ad $u = \text{cost}$ nel caso di pneumatico non lineare

te, alla nascita di una coppia, che agirà sull'assale posteriore dando origine al momento d'imbardata, e che se assumerà segno negativo si opporrà alla curvatura del veicolo, mentre al contrario, agirà a favore di quest'ultima. Altre considerazioni possono essere fatte osservando gli andamenti delle forze laterali di ciascuna ruota, rispettivamente per l'assale anteriore e per quello posteriore. I grafici, riportati in Fig. 5.6 ed in Fig. 5.7 mostrano che, mentre le ruote interne, raggiungono un valore massimo, variabile da curva a curva, con una concavità rivolta verso il basso, le ruote esterne, invece, crescono senza raggiungere un massimo, mostrando in generale un andamento non lineare con concavità rivolta verso l'alto, anche se non particolarmente marcata. Anche

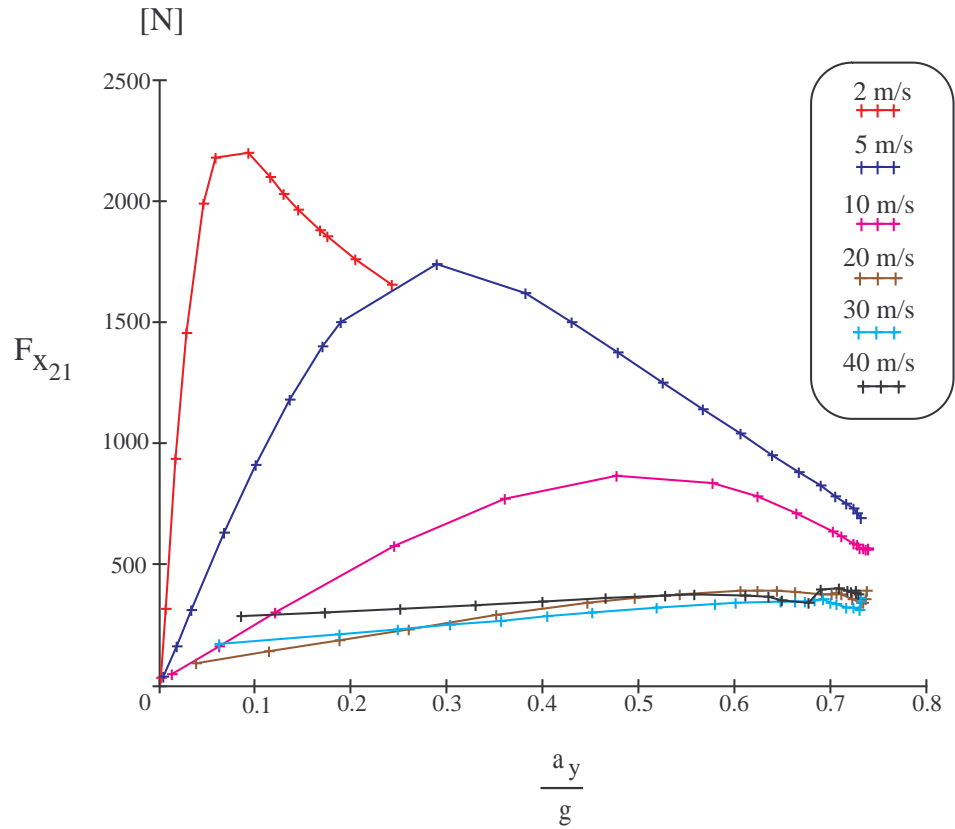


Figura 5.4: Andamento della forza longitudinale posteriore interna in funzione dell'accelerazione laterale a regime, relativo alla manovra ad $u = \text{cost}$

in questi grafici si può notare come gli andamenti delle curve per la prova a 2 m/s rappresentino un'eccezione rispetto alle altre. Gli andamenti simili delle curve, in questa prova, sono sinonimo del fatto che, poichè la velocità u , così come l'accelerazione laterale a regime \tilde{a}_y , sono piccole, non si avranno elevati trasferimenti di carico; tutto questo, unito a bassi valori dello scorrimento, porta ad avere comportamenti analoghi per le ruote del veicolo di uno stesso assale. È possibile notare, inoltre, come le forze laterali equivalenti di ciascun assale (Fig. 5.8) assumano segno positivo o negativo, a seconda del verso richiesto per raggiungere l'equilibrio dell'intero veicolo, il quale è continuamente perturbato dall'azione, variabile, del momento d'imbardata e da quella della forza laterale, agente su baricentro.

Differentemente dall'analisi con pneumatico lineare, può risultare conveniente, que-

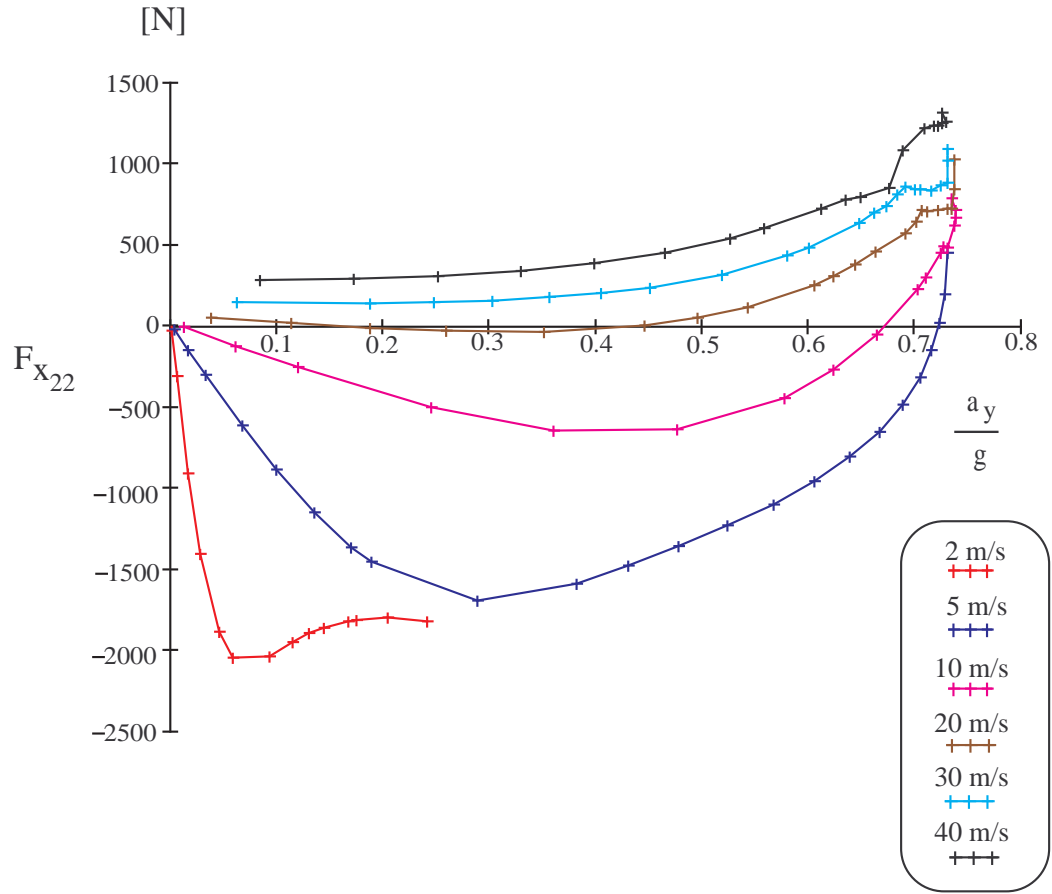


Figura 5.5: Andamento della forza longitudinale posteriore esterna in funzione dell'accelerazione laterale a regime, relativo alla manovra ad $u = \text{cost}$

sta volta, mostrare gli andamenti delle forze, scambiate a terra da ciascun pneumatico, in funzione dello scorrimento teorico. Gli andamenti riscontrati dovrebbero riflettere la curva classica di Fig. 4.1, modellata con l'ausilio della Magic Formula, anche se, ovviamente, vi saranno delle piccole eccezioni. I grafici, che rappresentano questi andamenti, sono riportati in Fig. 5.9, Fig. 5.10 ed in Fig. 5.11. Analizzando più da vicino i grafici, si nota che gli andamenti delle singole forze lungo una direzione, in funzione del relativo scorrimento, riflettono abbastanza bene l'andamento della curva classica precedentemente accennata, anche se si osservano delle curve che si discostano sensibilmente dall'andamento di quest'ultima. Infatti all'interno dei grafici delle forze laterali e longitudinali, relative alle ruote posteriori, si notano degli andamenti, soprat-

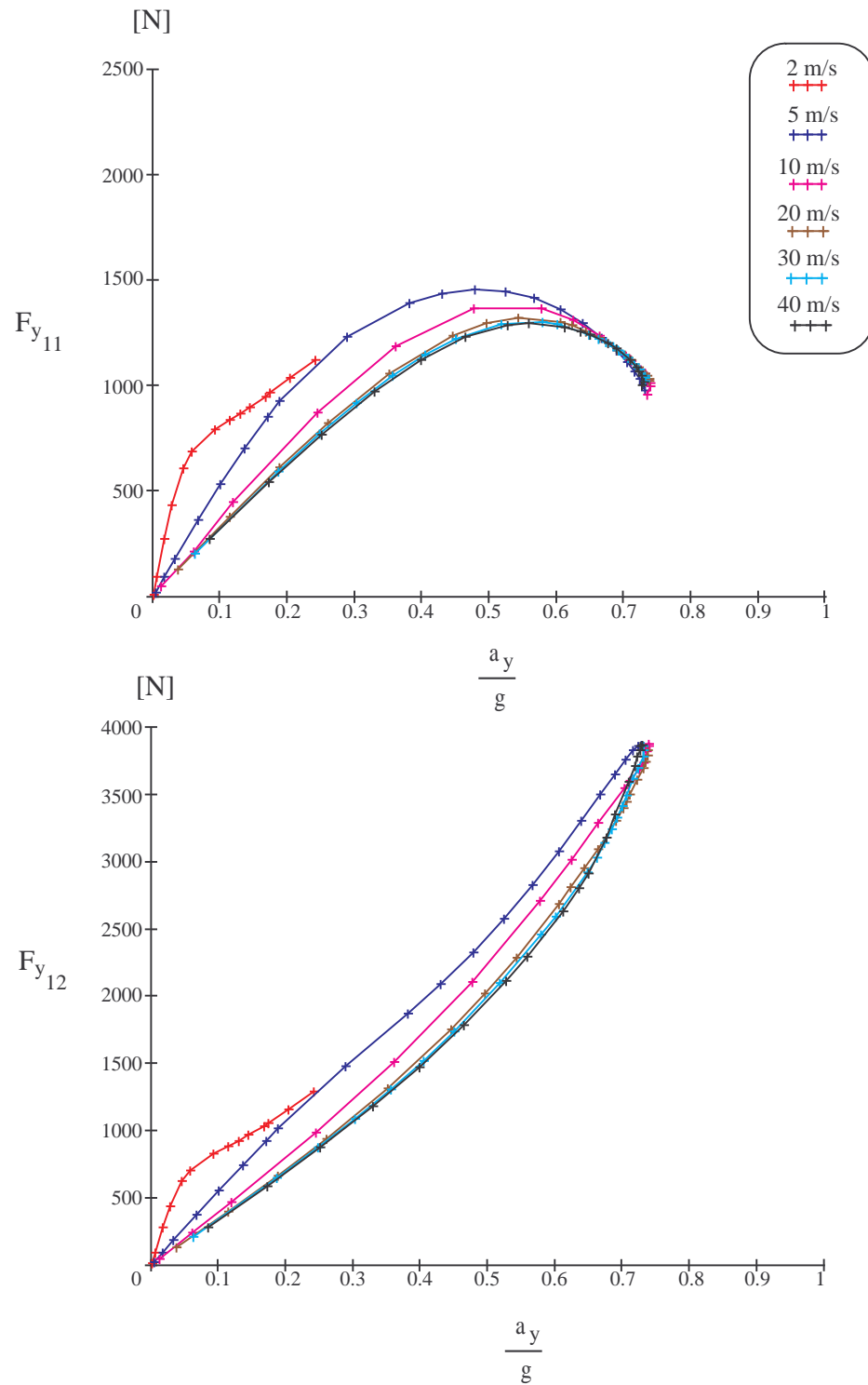


Figura 5.6: Andamento delle forze laterali anteriori in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra ad $u = \text{cost}$

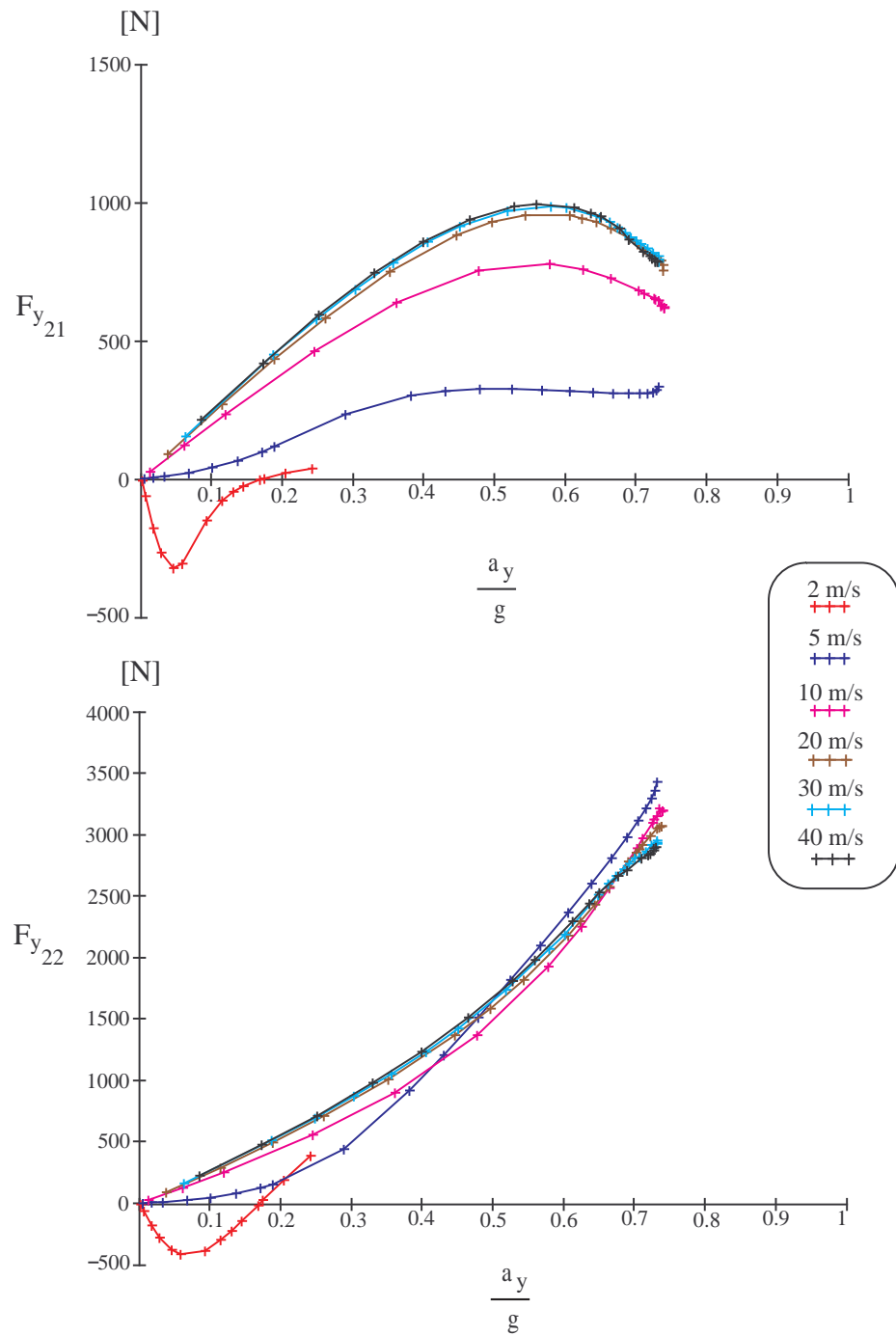


Figura 5.7: Andamento delle forze laterali posteriori in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra ad $u = \text{cost}$

tutto per la prove a basse e medie velocità, che si distaccano, sensibilmente, da quello di Fig. 4.1. Pensando però a quanto detto in precedenza in merito all'equilibrio ed

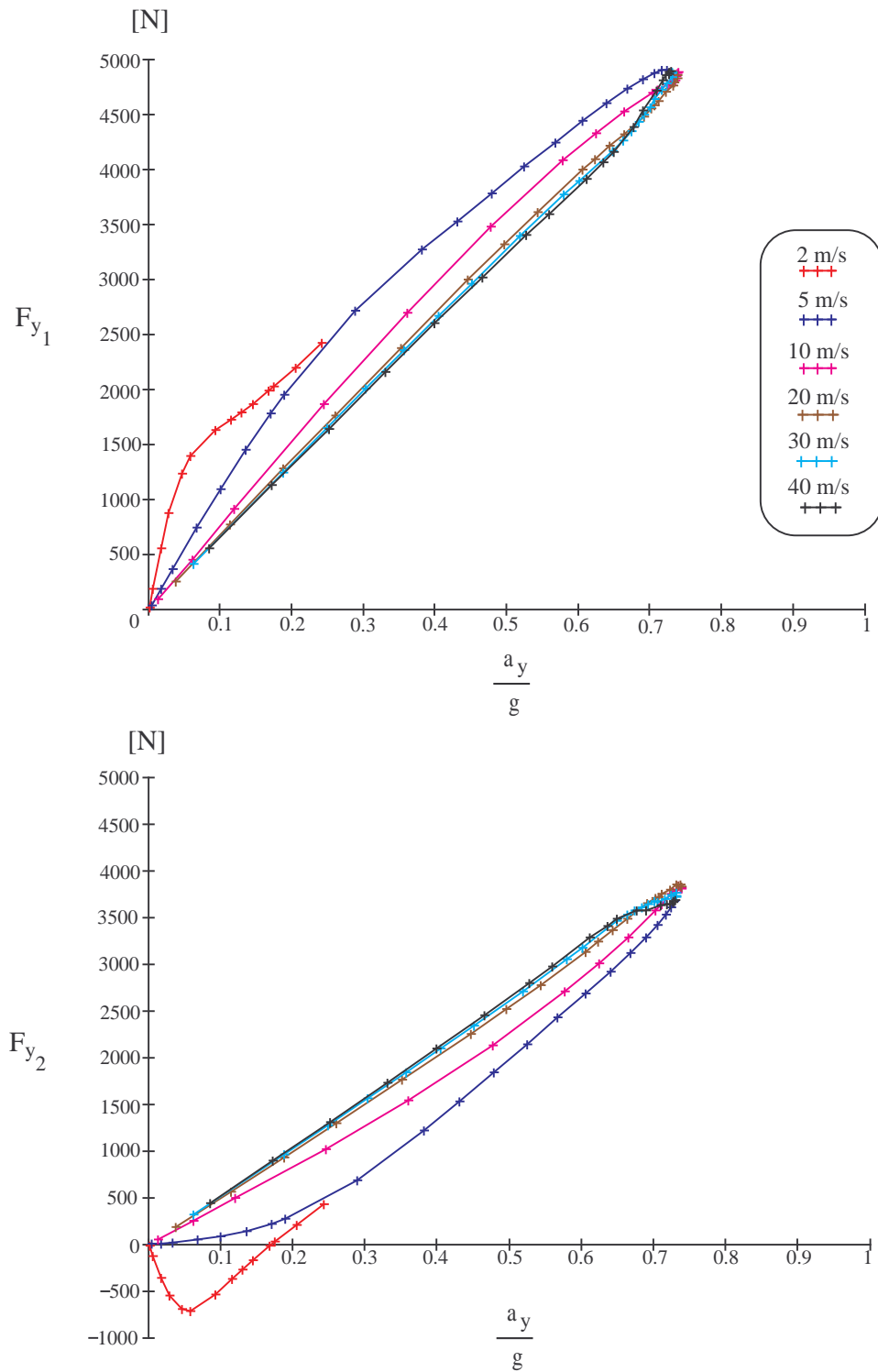


Figura 5.8: Andamento delle forze laterali relative agli assali in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra ad $u = cost$

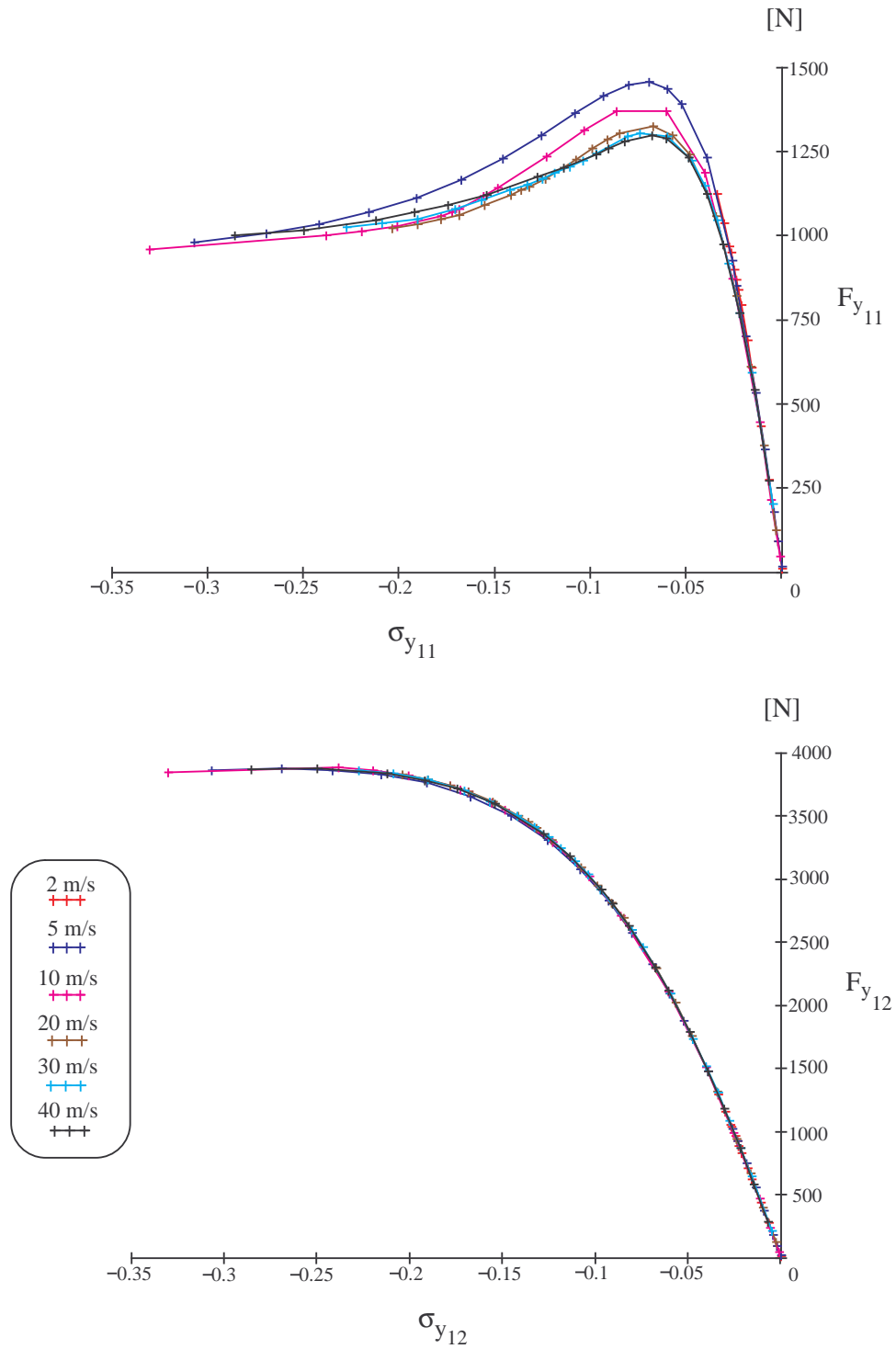


Figura 5.9: Andamento delle forze laterali anteriori in funzione dello scorrimento teorico, per una manovra ad $u = \text{cost}$

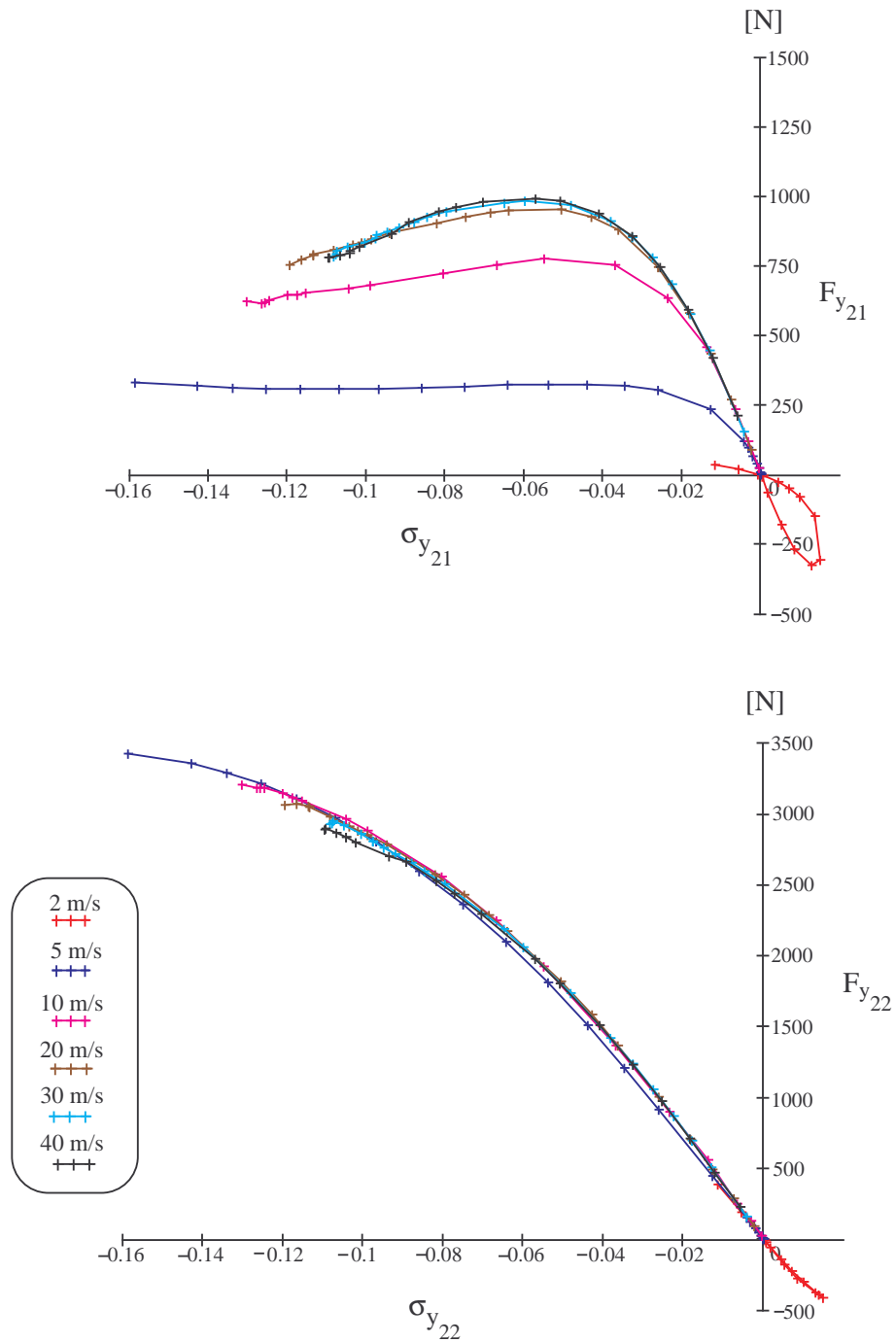


Figura 5.10: Andamento delle forze laterali posteriori in funzione dello scorrimento teorico, per una manovra ad $u = \text{cost}$

all'azione del momento d'imbardata, è possibile dare una spiegazione di ciò che accade; infatti a bassa velocità il valore delle forze laterali al posteriore risulta opposto rispetto

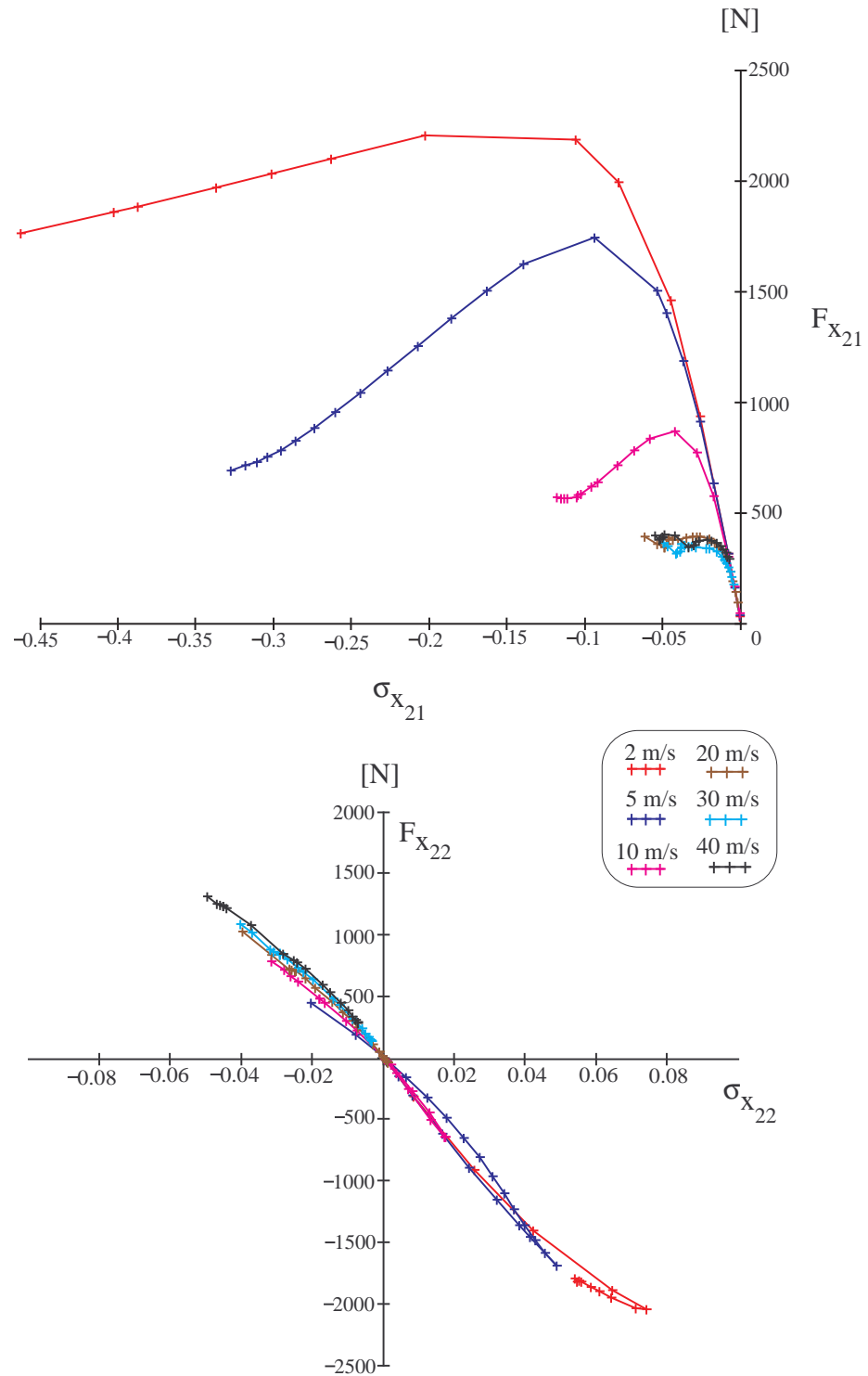


Figura 5.11: Andamento delle forze longitudinali posteriori in funzione dello scorrimento teorico, per una manovra ad $u = cost$

a quello delle forze anteriori, proprio per garantire l'equilibrio, sia alla traslazione che a momento, dell'intero veicolo. La stessa motivazione può essere addotta per spiegare il diverso andamento assunto dalle forze longitudinali posteriori; infatti, quest'ultime, alle basse e medie velocità dove il segno è discorde, danno origine ad una coppia, e quindi ad un contributo al momento d'imbardata, che agisce nel verso opposto alla curvatura, mentre alle alte velocità, le forze, pur assumendo versi concordi, hanno, però, intensità differenti, dando origine ad una coppia che tende a favorire la percorrenza della curva da parte del veicolo. L'ovvia conseguenza che se ne trae, è il caratteristico andamento del momento M_{z_2} , che tende, all'aumentare della velocità di prova, ma più in generale dell'accelerazione laterale a regime, a passare da valori *negativi* a valori *positivi*, rispettivamente, opponendosi o agendo a favore della curvatura.

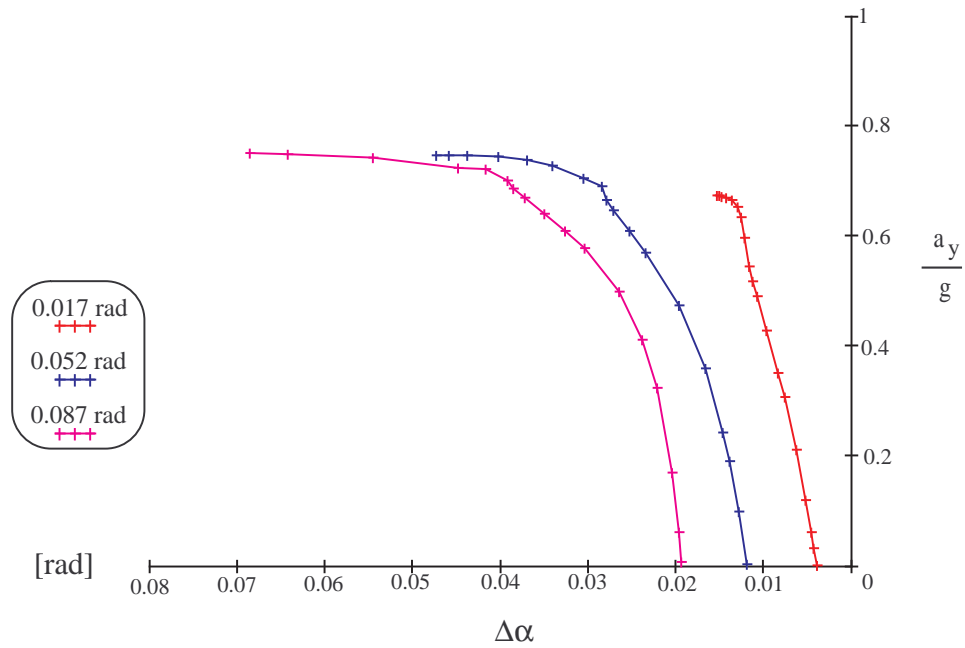


Figura 5.12: **Handling diagram** relativo alla manovra eseguita a $\delta = cost$

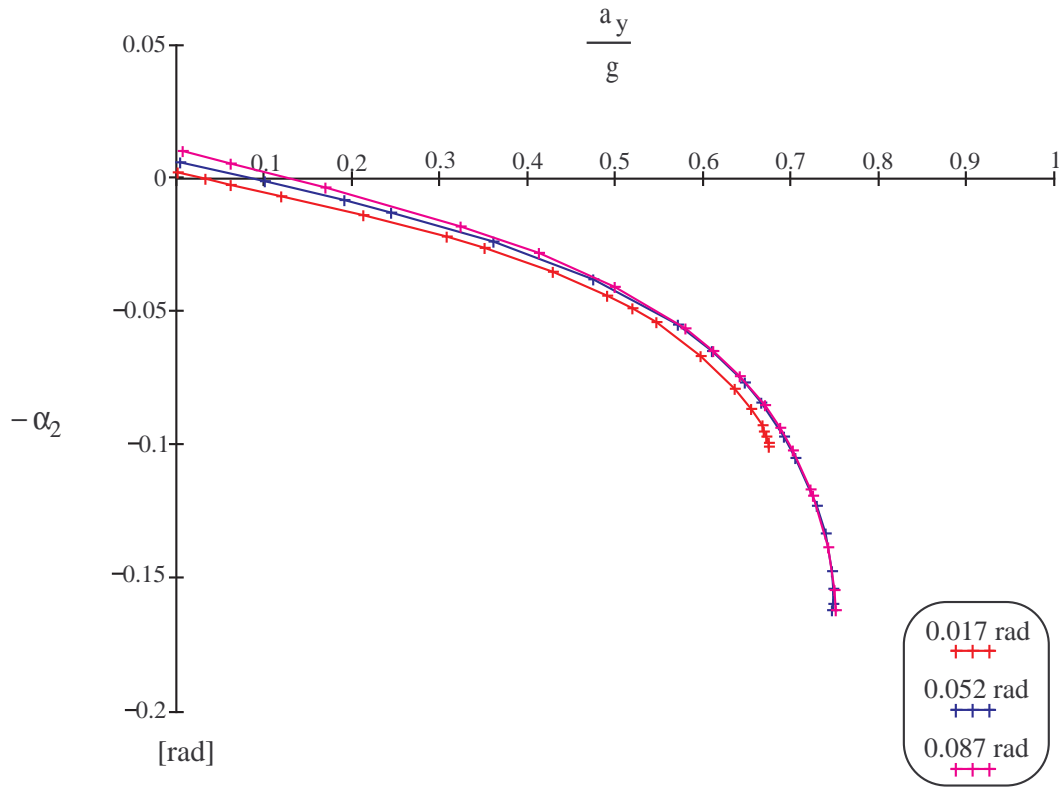


Figura 5.13: Andamento dell'angolo di assetto relativo alla manovra eseguita a $\delta = cost$

5.2.2 Manovra a $\delta = cost$

Per analizzare il comportamento del veicolo da un altro punto di vista, si possono eseguire prove all'interno delle quali si mantenga costante l'angolo di sterzo δ e si faccia variare la velocità longitudinale del veicolo u . Quest'ultima oscillerà all'interno di un range di valori compreso tra 1 m/s , e 60 m/s , mentre gli angoli di sterzo a cui verranno effettuate le prove saranno: 0.017 rad (1°), 0.035 rad (3°) ed infine 0.087 rad (5°). Prima di continuare nella trattazione, occorre precisare che, il numero di prove ed i valori dell'angolo di sterzo, anche se non elevati, sono stati ritenuti sufficienti ad evidenziare tutti i fenomeni caratteristici del modello, già riscontrati precedentemente. Si ha una riprova di quanto appena detto, analizzando il grafico di Fig. 5.12, dove è mostrato l'handling diagram, relativo ad una manovra a $\delta = cost$, per le tre prove sopracitate. Come si può notare, le curve hanno andamenti simili a quelli già riscontrati durante

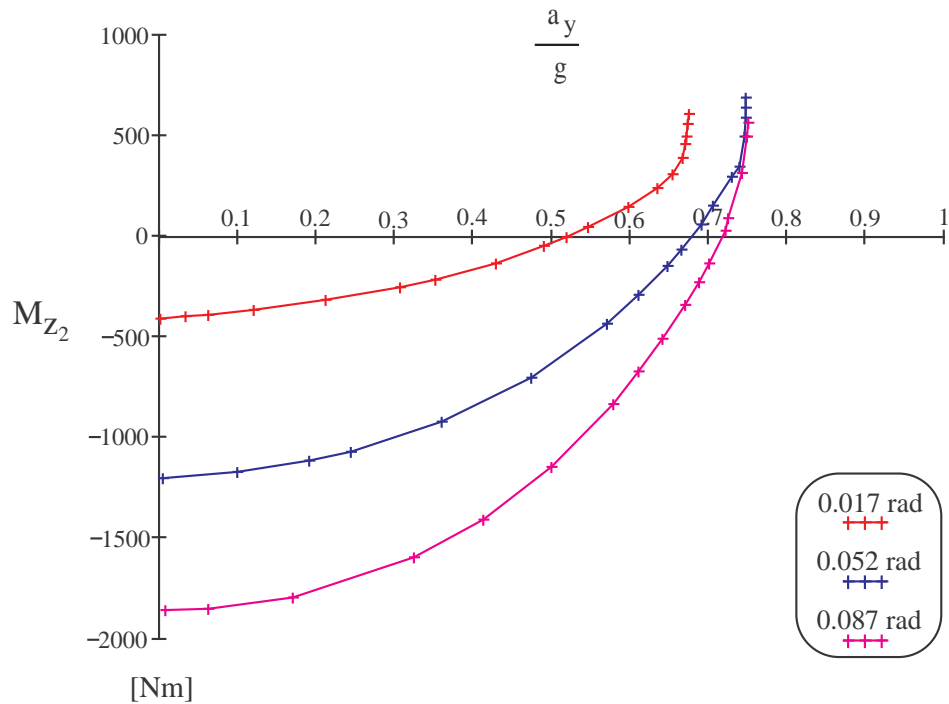


Figura 5.14: Andamento del momento d'imbardata relativo ad una manovra eseguita a $\delta = \text{cost}$

la manovra ad $u = \text{cost}$, risultando non perfettamente regolari; inoltre, aumentando il valore dell'angolo di sterzo, si nota uno spostamento della curva corrispondente verso valori maggiori di $\Delta\alpha$; ciò non accadeva nella teoria classica, dove tutte le curve terminavano nell'origine. Proprio come accennato all'interno dell'analisi con pneumatico lineare, cambia il concetto di *gradiente di sottosterzo*, che serve, ora, a caratterizzare il comportamento del veicolo, solo relativamente al tipo di manovra effettuata.

Analogamente a quanto fatto per le prove eseguite ad $u = \text{cost}$, si possono osservare gli andamenti dell'angolo di assetto e del momento d'imbardata M_{z_2} in funzione dell'accelerazione laterale a regime. Per quanto riguarda il primo dei due grafici, rappresentato in Fig. 5.13 si nota che l'andamento è decrescente, con carattere non lineare soprattutto alle alte accelerazioni, mentre alle basse, il valore assunto dal termine $-\alpha_2$ risulta positivo, per poi passare a negativo all'aumentare di \tilde{a}_y . Tutto ciò deriva dal fatto che il vettore velocità \mathbf{V}_g tende, durante la curvatura, a passare al di là del piano medio

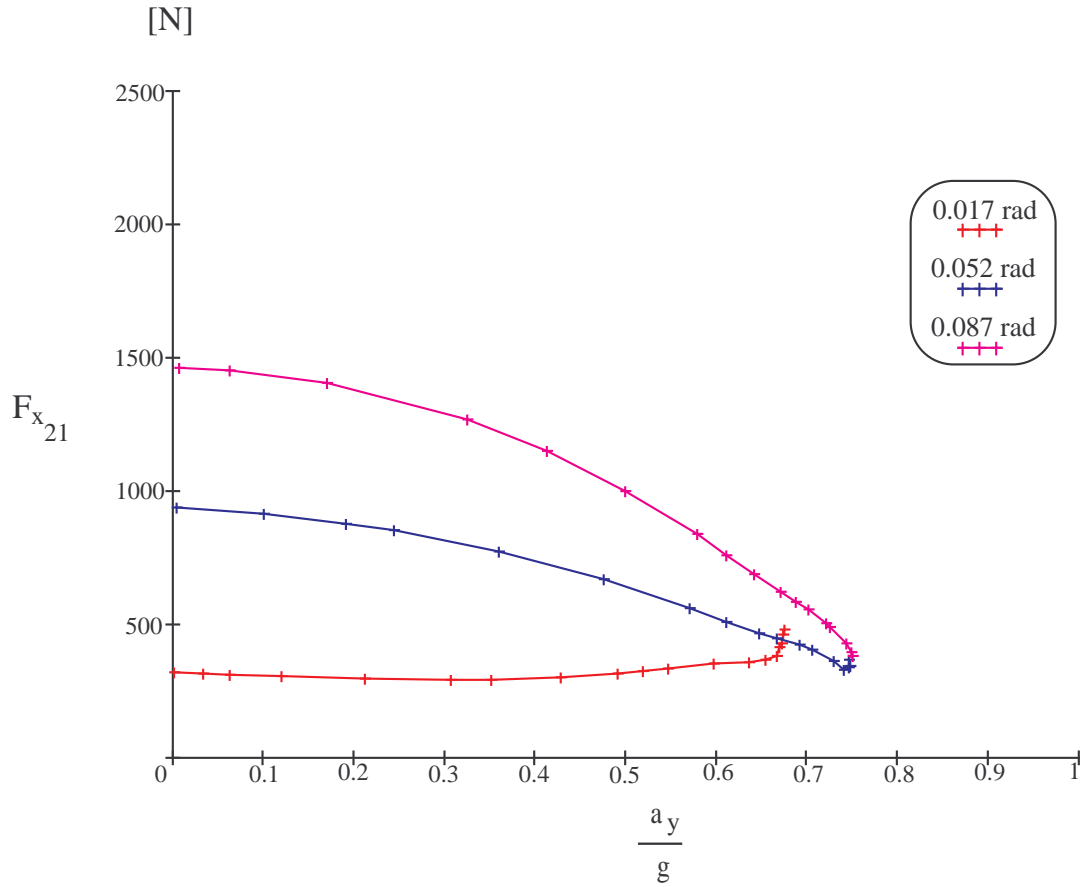


Figura 5.15: Andamento della forza longitudinale posteriore interna in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra a $\delta = \text{cost}$

longitudinale del veicolo, facendo assumere, all'angolo di assetto β , valore negativo. Quest'ultimo, inoltre, accentua la sua diminuzione, con un andamento decisamente non lineare, a seguito dell'azione del momento d'imbardata (Fig. 5.14), che, dopo un primo momento in cui tende ad opporsi alla curvatura, agisce in suo favore, determinando un ulteriore spostamento del vettore \mathbf{V}_g verso la parte del veicolo esterna alla curva.

Ovviamente, come già più volte accennato, l'andamento del momento M_{z_2} , è una conseguenza diretta del valore assunto dalle forze longitudinali posteriori. A proposito di quest'ultime, si può osservare che, più l'angolo di sterzo utilizzato nella prova sarà elevato, tanto più sarà grande il valore di ciascuna forza $F_{x_{2j}}$. Bisogna precisare, però,

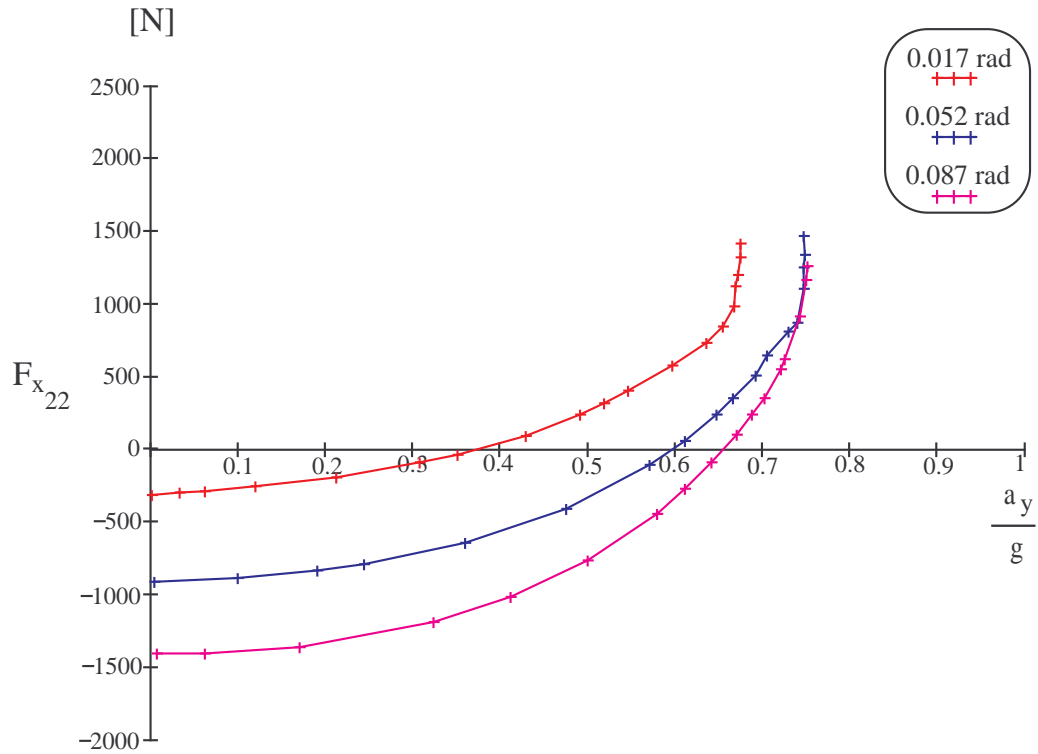


Figura 5.16: Andamento della forza longitudinale posteriore esterna in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra a $\delta = \text{cost}$

che quanto detto è vero considerando le grandezze in valore assoluto, visto che, come si evince da Fig. 5.16, il valore della forza longitudinale esterna alla curva risulta, spesso, negativo.

Avvalendoci, adesso, dei grafici riportati in Fig. 5.17 ed in Fig. 5.18, è possibile valutare il comportamento del veicolo in modo più dettagliato. Considerando il fatto che il veicolo inizia la prova già a regime e con un angolo di sterzo fissato, risulta evidente che il grafico relativo al momento d'imbardata parta da un valore diverso da zero, così come i grafici delle forze scambiate a terra da ciascun pneumatico; in particolare le forze laterali, del lato del veicolo interno alla curva, mostrano un andamento che presenta un massimo, ovvero il raggiungimento di una saturazione nella crescita della forza rispetto all'accelerazione laterale. Questo andamento, peraltro assente nelle curve delle forze laterali relative al lato del veicolo esterno alla curva, è causato dall'azione del

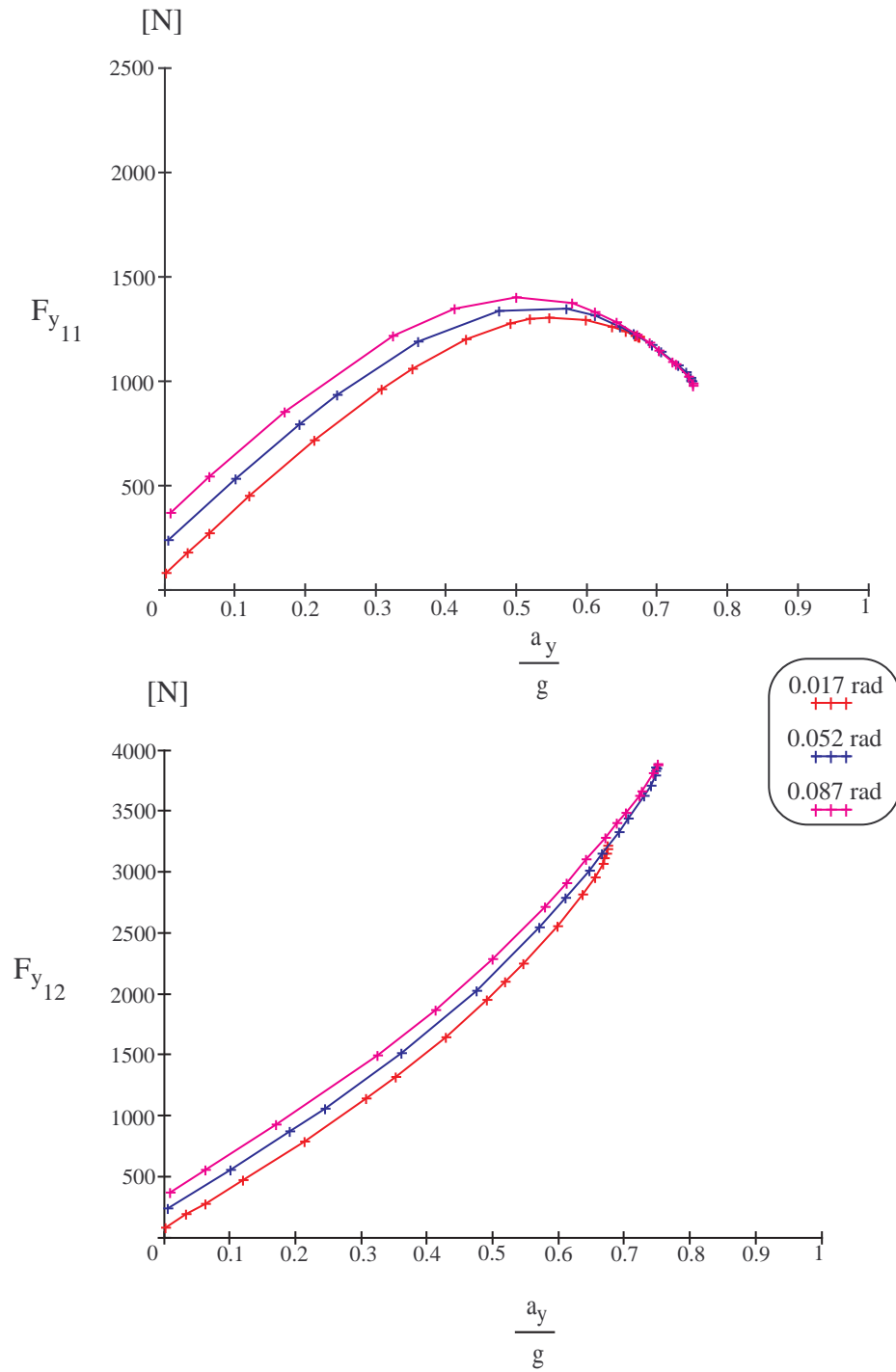


Figura 5.17: Andamento delle forze laterali anteriori in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra a $\delta = \cos t$

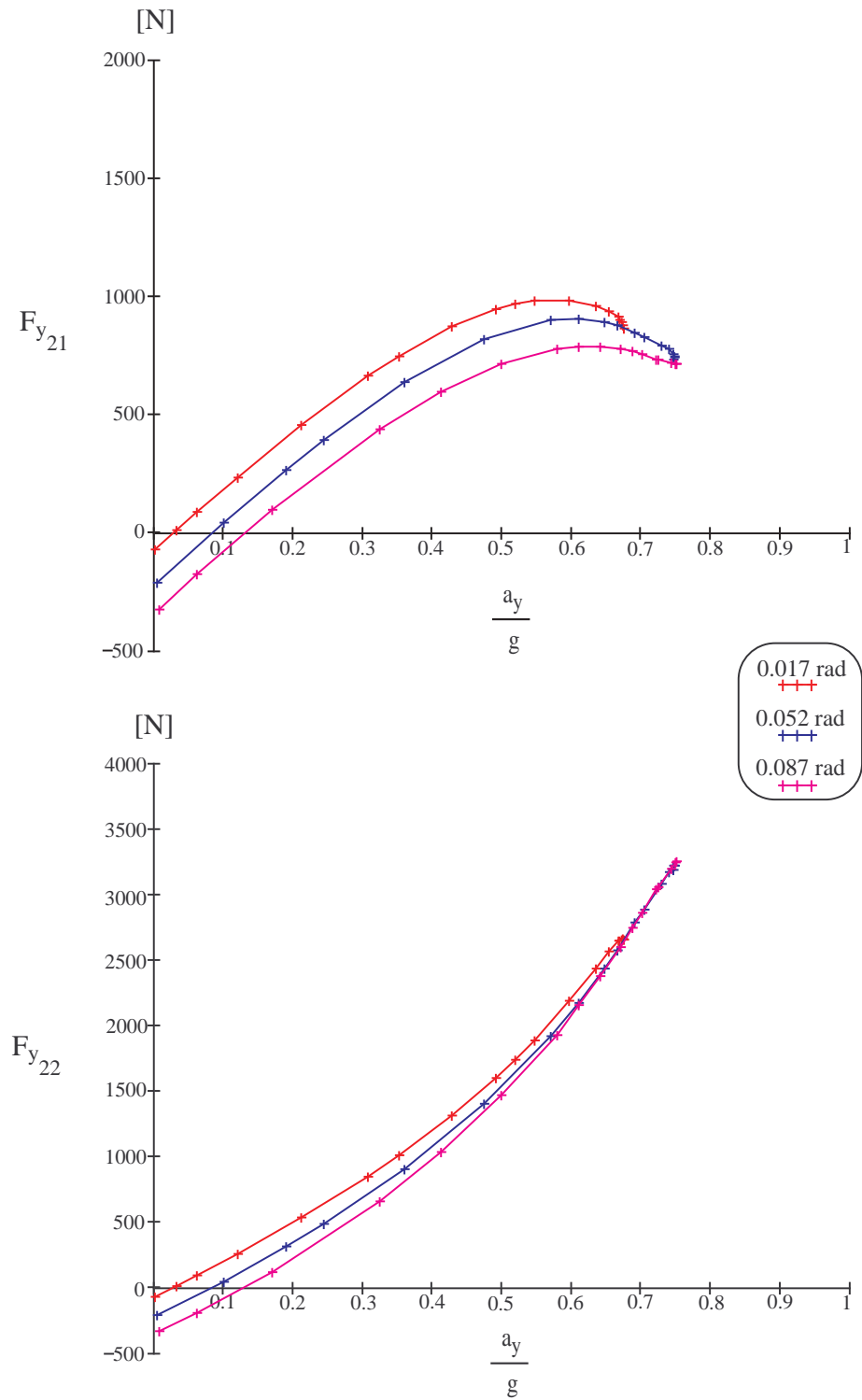


Figura 5.18: Andamento delle forze laterali posteriori in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra a $\delta = \cos t$

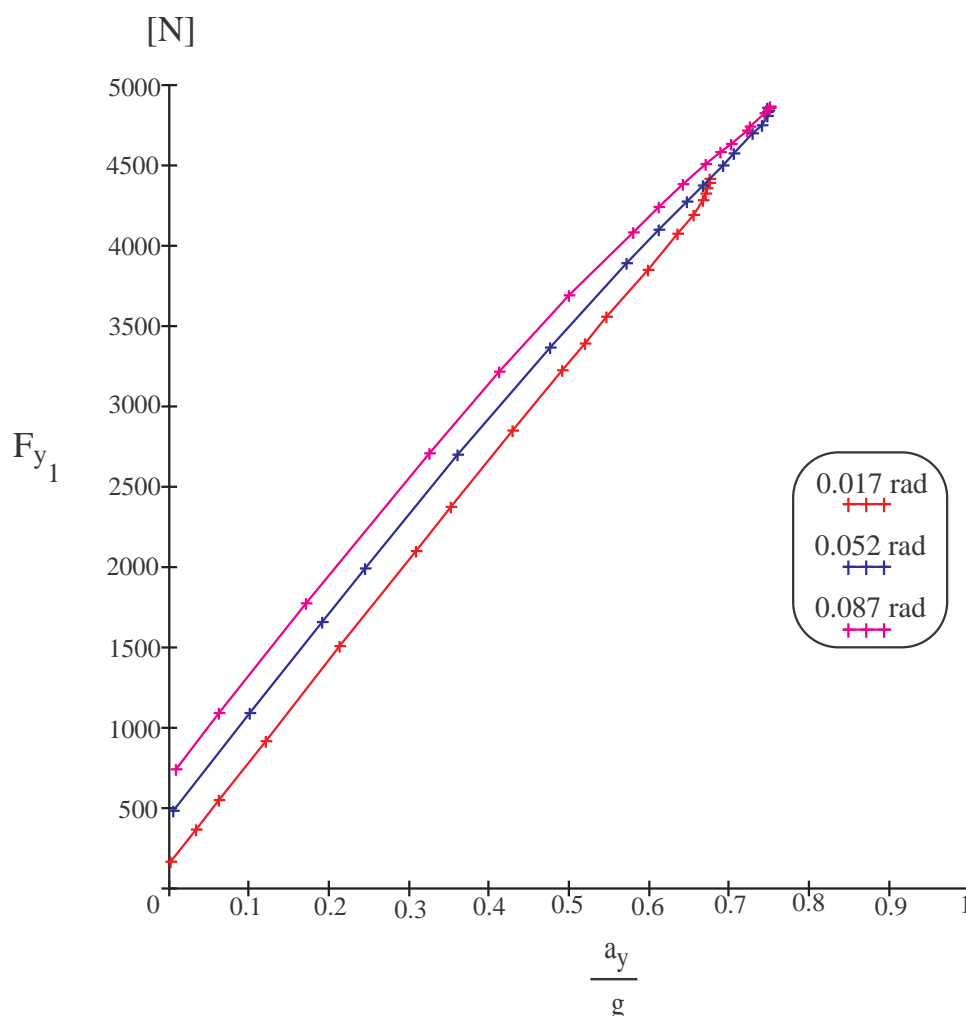


Figura 5.19: **Andamento delle forze laterali relative all'assale anteriore in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra a $\delta = \text{cost}$**

trasferimento di carico su ciascun assale, il quale abbassa il limite di tenuta dei pneumatici che vedono diminuire il loro carico verticale. Per poter renderci conto di questo, é possibile osservare il fenomeno in un modo migliore, vale a dire rappresentando tutte le forze in gioco in funzione del rispettivo scorrimento teorico, evidenziando così il vero legame costitutivo per la ruota. Basta osservare, infatti, la Fig. 5.21 , la Fig. 5.22 e Fig. 5.23 per renderci conto immediatamente che il limite viene raggiunto all'anteriore prima che al posteriore, ed in particolare, trascurando le ruote del lato interno alla curva, sarà la ruota anteriore esterna a raggiungere il valore massimo, di tenuta, della

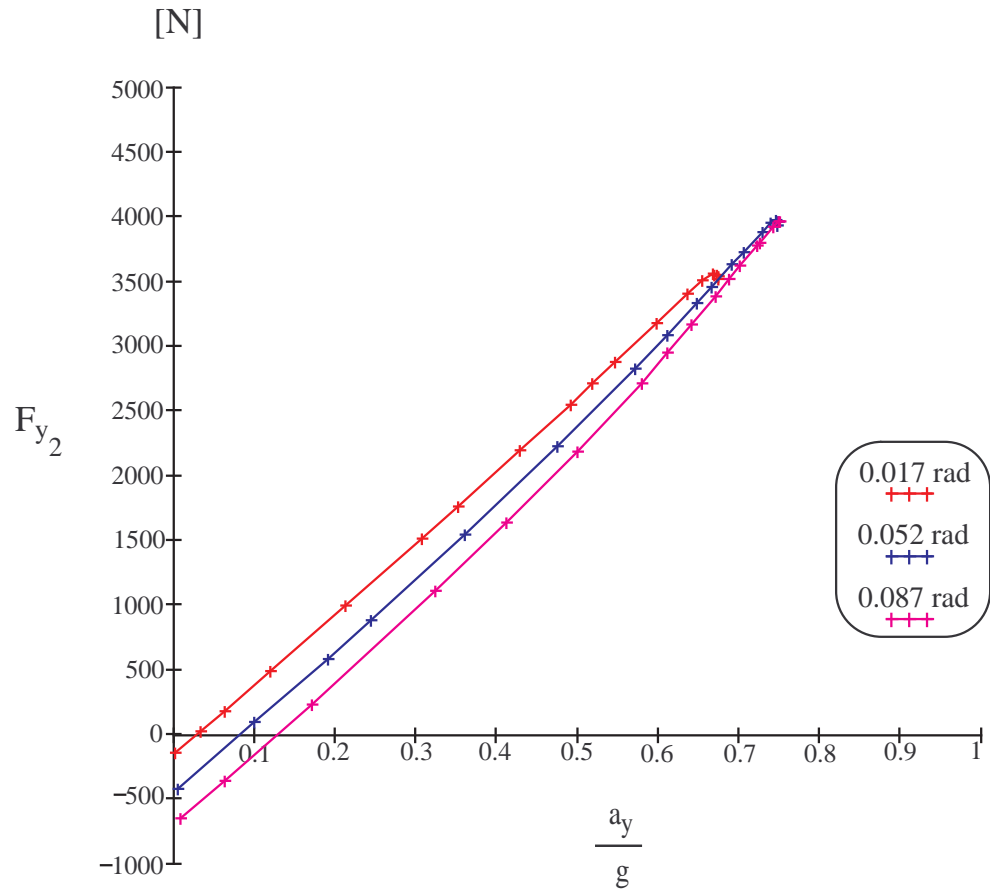


Figura 5.20: Andamento delle forze laterali relative all'assale posteriore in funzione dell'accelerazione laterale a regime, per una manovra a $\delta = \cos t$

forza laterale ed a determinare così il limite dinamico per il veicolo.

Vale la pena fare un'ultima osservazione, relativa al grafico della forza posteriore longitudinale interna; infatti lo strano andamento deriva, per quanto detto, dal fatto che il veicolo, quando inizia la prova, è già in condizione di regime con l'ovvia conseguenza che la forza $F_{x_{21}}$ verrà, istantaneamente, ad avere un valore diverso da zero, dal quale partirà successivamente la curva caratteristica della prova.

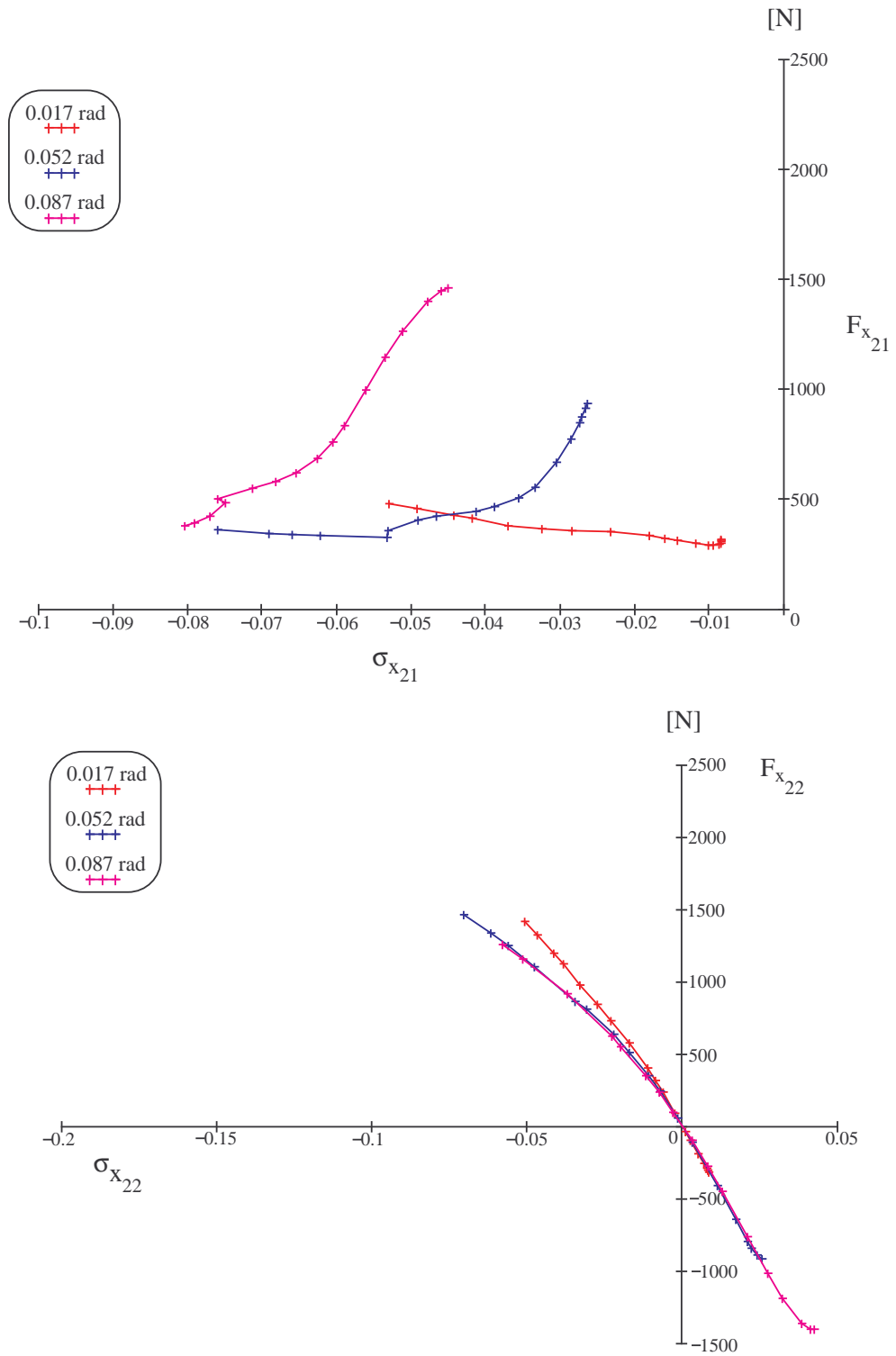


Figura 5.21: Andamento delle forze longitudinali posteriori in funzione dello scorrimento teorico, per una manovra a $\delta = \text{cost}$

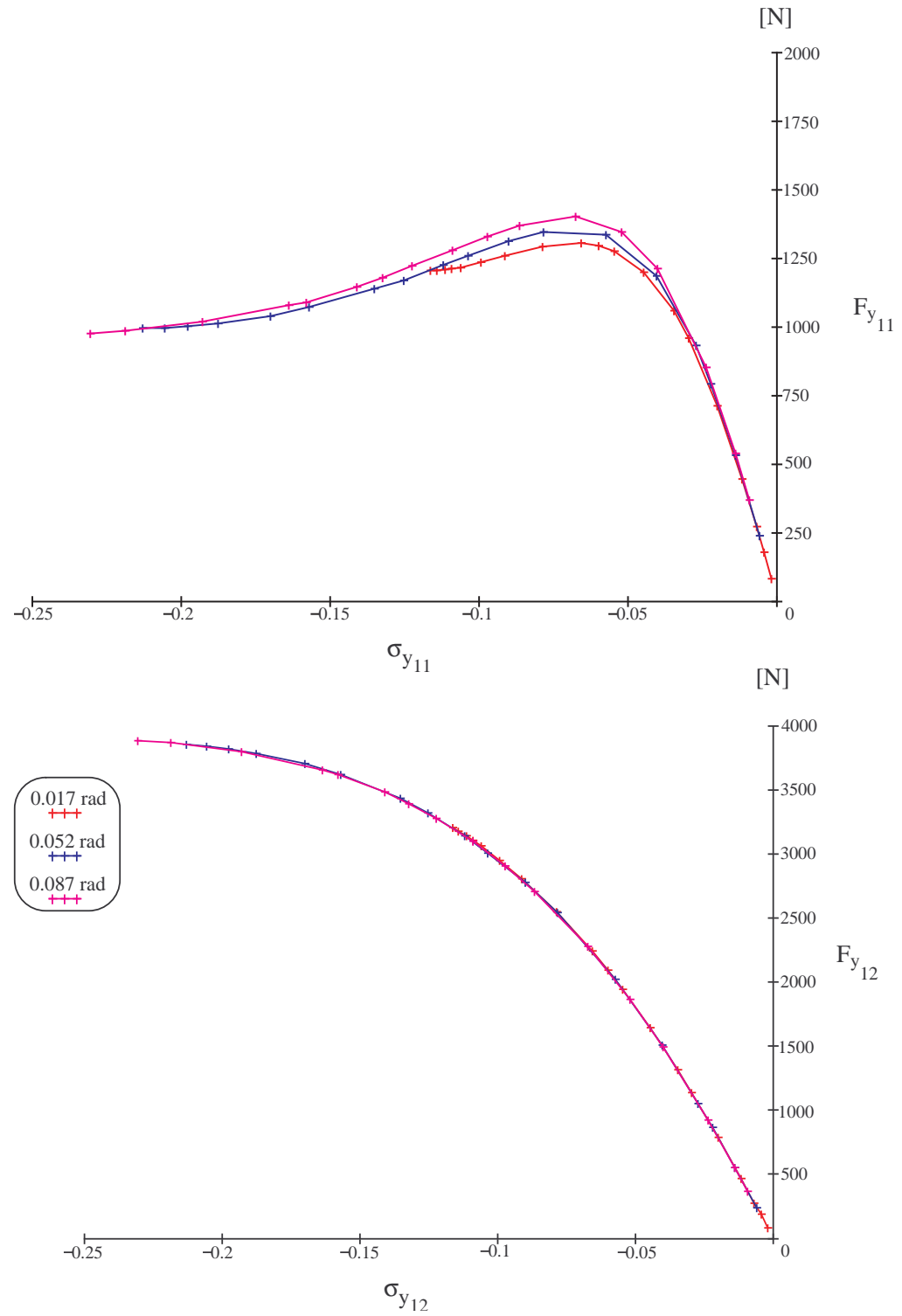


Figura 5.22: Andamento delle forze laterali anteriori in funzione dello scorrimento teorico, per una manovra a $\delta = \text{cost}$

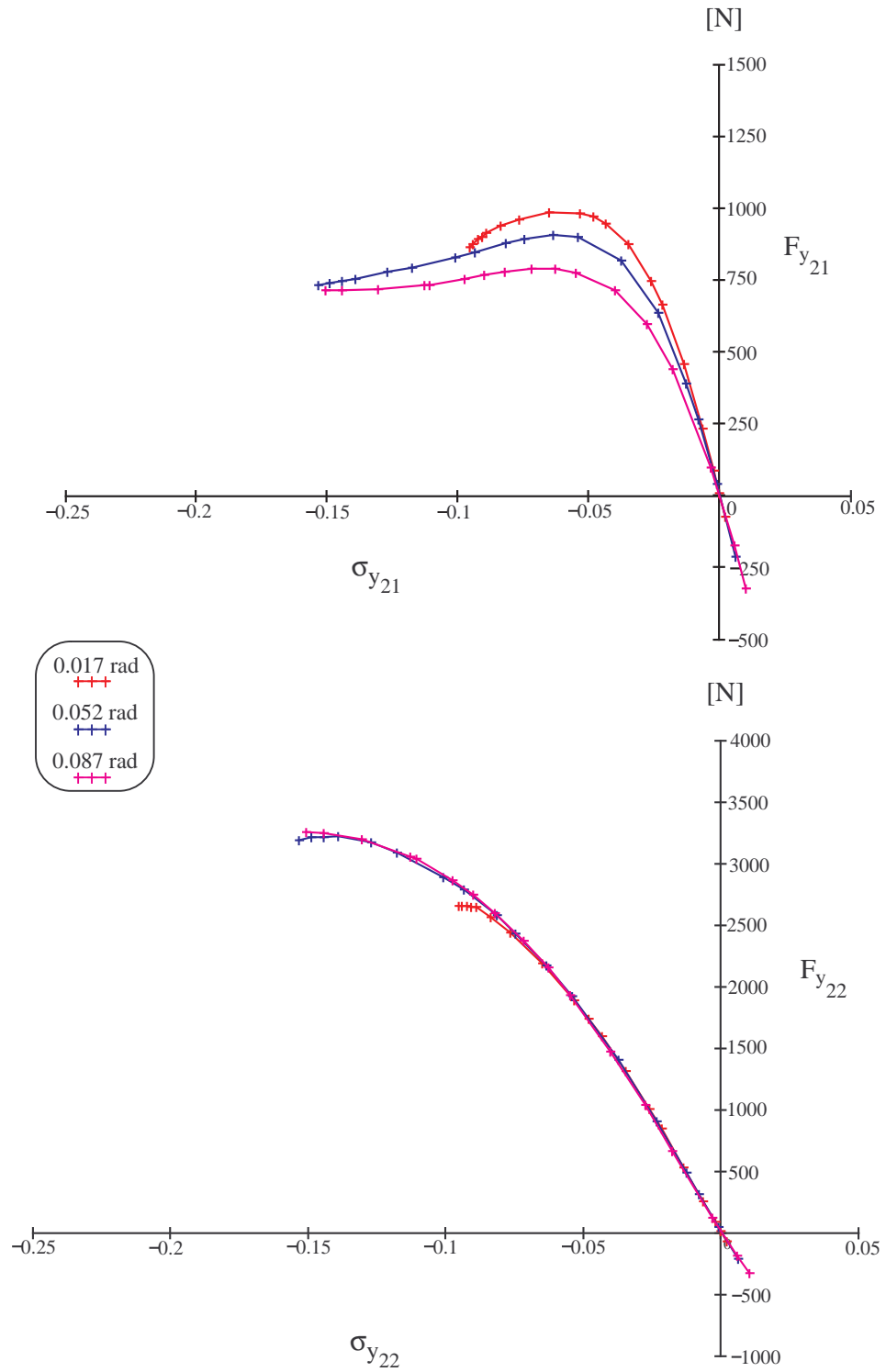


Figura 5.23: Andamento delle forze laterali posteriori in funzione dello scorrimento teorico, per una manovra a $\delta = \cos t$

5.2.3 Manovra ad $R = cost$

L'ultima manovra che rimane da analizzare, è quella a $R = cost$, all'interno della quale si faranno variare simultaneamente, sia la velocità longitudinale u , che l'angolo di sterzo δ . Durante lo svolgimento delle prove, eseguite rispettivamente a $R = 200\text{ m}$, $R = 100\text{ m}$, $R = 50\text{ m}$ e $R = 25\text{ m}$, si è presentato, però, un problema, legato al calcolo numerico delle soluzioni del sistema dinamico a regime, e che si è rivelato, eccessivamente complesso per i mezzi con i quali è stata condotta, fin qui, l'analisi. In pratica per poter risolvere il sistema per via *numerica*, occorre specificare i valori delle tre variabili, dai quali far partire la ricerca della soluzione; questo non sarebbe un problema, come avvenuto per le prove precedenti, se non si aggiungesse a ciò il fatto che i parametri da variare, questa volta, sono due. Infatti stabilendo il valore del raggio di curvatura, al quale eseguire la prova, occorre fissare, per poter iniziare l'analisi, un primo valore della velocità longitudinale u , ma così facendo si vincola, anche, il valore che dovrà assumere la velocità d'imbardata r , legata alle due grandezze precedenti dalla relazione $R = \frac{u}{r}$. Visto che, però, la velocità d'imbardata è una soluzione del sistema dinamico, bisognerà intervenire sul secondo parametro, l'angolo di sterzo, affinché la variabile r assuma il valore che permetta alla traiettoria del veicolo, di avere un raggio R , pari a quello che caratterizza l'intera prova. Ovviamente nel caso dell'analisi con pneumatico lineare, è possibile superare quest'ostacolo perchè si ha una complicazione matematica del sistema rappresentata solamente dalla presenza del termine q/u , ma in quest'analisi, oltre a tale presenza, c'è anche, la non linearità introdotta dalle equazioni costitutive del pneumatico, che rendono la risoluzione ricorsiva, a cui il sistema è sottoposto, molto onerosa. Per questo motivo è stato possibile ottenere, solamente, andamenti parziali delle curve caratteristiche, necessarie per la descrizione del comportamento del veicolo. Un esempio è mostrato in Fig. 5.24, dove è rappresentato l'handling diagram per le quattro prove ad $R = cost$, e dove si nota chiaramente il punto in cui si interrompe la risoluzione del sistema dinamico, lasciando

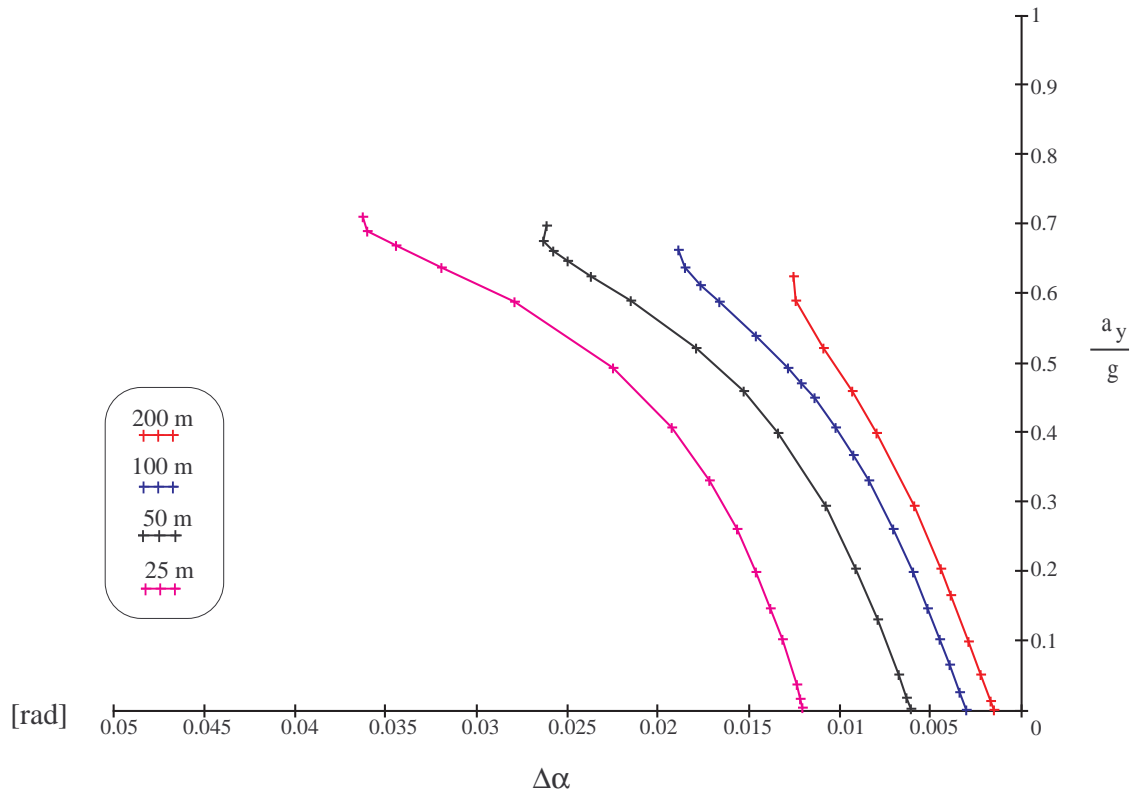


Figura 5.24: **Handling diagram** relativo alla manovra eseguita a $R = cost$

l'analisi incompiuta.

In merito a questo occorre precisare, però, che le prove ad $u = cost$, e quelle condotte a $\delta = cost$ permettono ugualmente di caratterizzare il comportamento dinamico del veicolo con differenziale bloccato, consentendo, inoltre, di evidenziarne gli aspetti più peculiari.

5.2.4 Considerazioni sul caso in cui $q/u = 0$

Tutta l'analisi, fino ad ora svolta, si basa sull'ipotesi che vi siano slittamenti alle ruote motrici, avendo assunto $q/u \neq 0$. Per capire meglio come questa ipotesi influenzi l'intera analisi, si possono mettere a confronto gli andamenti di alcune grandezze caratteristiche della dinamica del veicolo, nei due casi in cui $q/u \neq 0$ e $q/u = 0$. Per

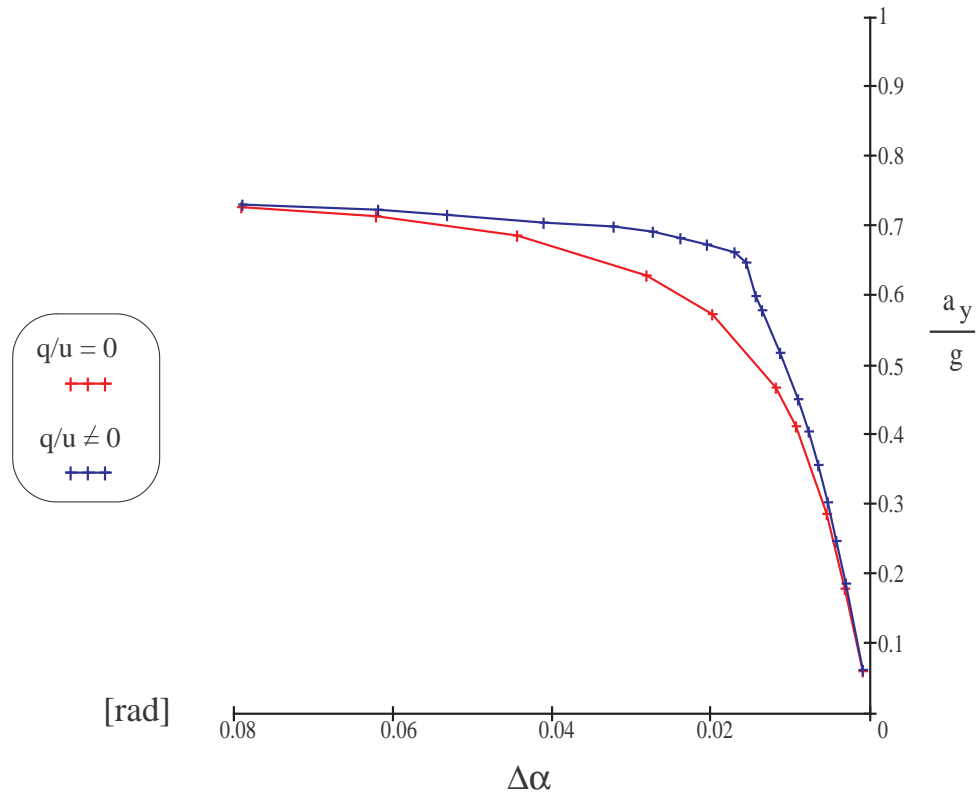


Figura 5.25: **Confronto tra le curve dell'handling diagram ottenute per $q/u \neq 0$ e $q/u = 0$, durante una manovra ad $u = \text{cost}$, con $u = 30 \text{ m/s}$**

esempio in Fig. 5.25 sono mostrati, per una prova a $u = \text{cost}$, con $u = 30 \text{ m/s}$, i due diversi andamenti assunti dall'handling diagram. Come si può vedere la presenza del termine q/u induce un comportamento direzionale che si distacca da quello del caso classico, il quale presenta un andamento molto regolare e privo di qualsiasi oscillazione. Analoghi grafici dove è possibile riscontrare tali differenze, oltre, ovviamente agli handling diagrams delle altre prove, risultano essere quelli dell'angolo di assetto e del momento d'imbardata. Si può notare, infatti, come, nel primo esempio, riportato in Fig. 5.26, il termine introdotto tenda ad accentuare la non linearità della curva, facendo crescere più rapidamente, in valore assoluto, l'angolo di deriva posteriore, rappresentativo della differenza $\beta - \beta_0$. Un comportamento simile si ritrova, anche in Fig. 5.27 dove è rappresentato l'andamento del momento d'imbardata nei due diversi casi;

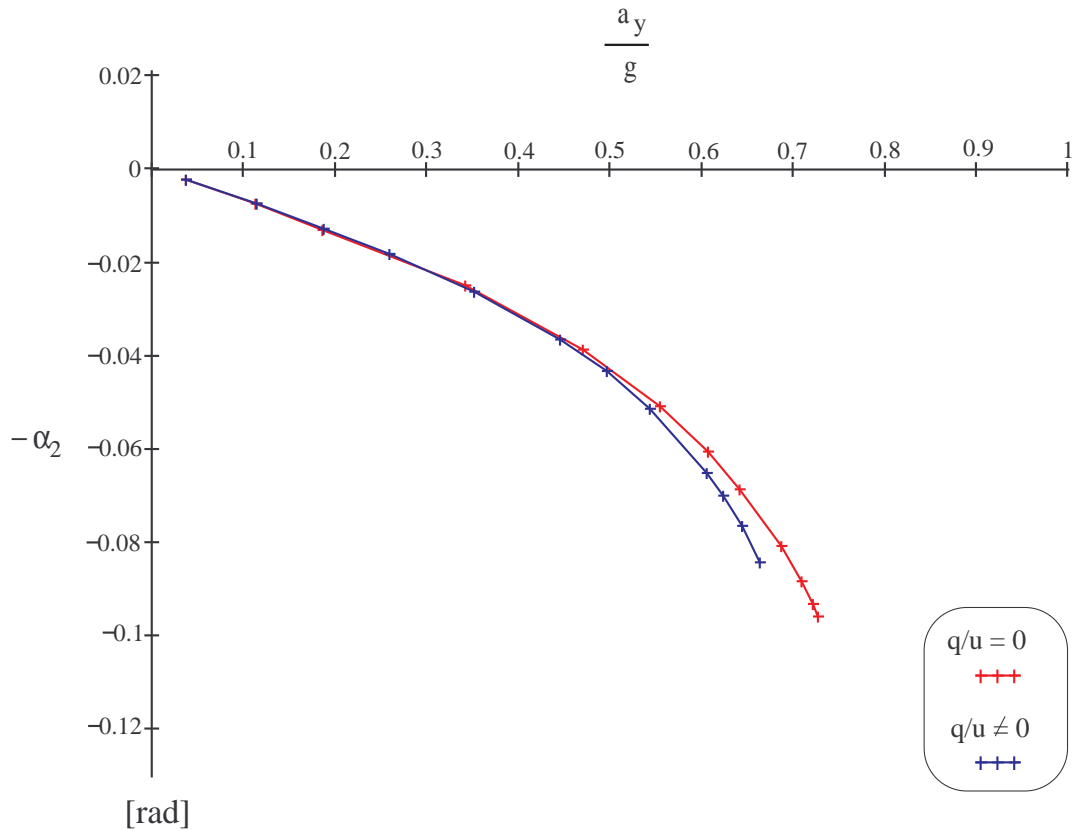


Figura 5.26: **Confronto tra le curve rappresentative dell'andamento dell'angolo di assetto, ottenute per $q/u \neq 0$ e $q/u = 0$, durante una manovra ad $u = cost$, con $u = 20$ m/s**

questa volta l'effetto di q/u è quello di far passare più rapidamente l'andamento della curva, da decrescente a crescente, anticipando il raggiungimento di valori positivi da parte del momento, e abbassando anche il valore dell'accelerazione laterale a regime, alla quale l'effetto del momento d'imbardata diviene favorevole alla curvatura. Anche per queste grandezze potrebbero riportarsi numerosi grafici, come ulteriori esempi dei comportamenti evidenziati, ma risulterebbe superfluo e, soprattutto, ripetitivo. Così come non molto significativi risultano le curve delle forze a terra, rappresentate nei due diversi casi, in quanto gli andamenti assunti non si discostano molto gli uni dagli altri, rendendone, quindi, priva d'interesse la rappresentazione.

Possiamo concludere dicendo che l'aver considerato la presenza di piccoli slittamenti

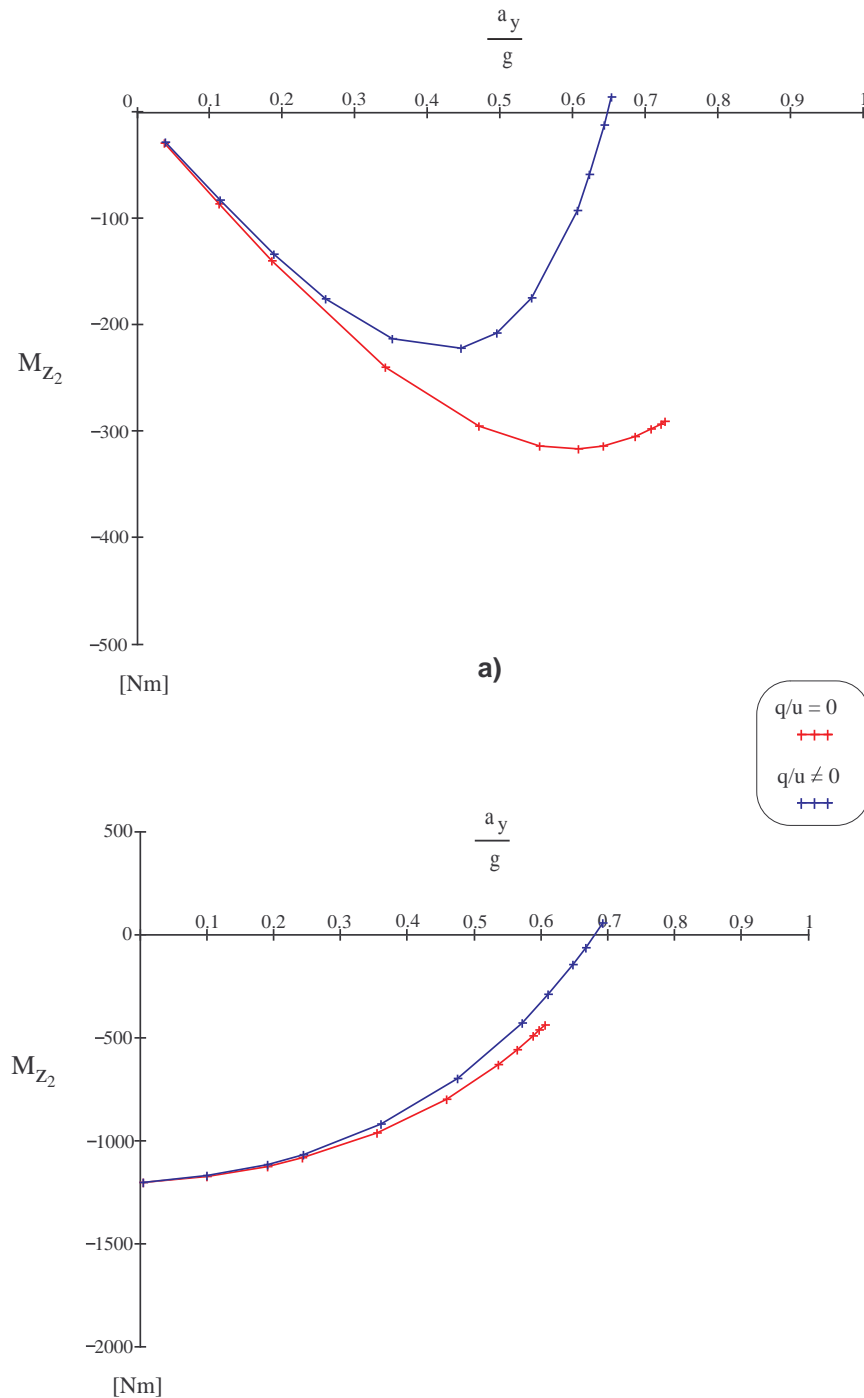


Figura 5.27: Confronto tra gli andamenti, per $q/u \neq 0$ e $q/u = 0$, delle curve caratteristiche del momento d'imbardata, ottenute da due diverse prove: a) prova ad $u = \text{cost}$, con $u = 20$ m/s ; b) prova ad $\delta = \text{cost}$, con $\delta = 0.052$ rad (3°)

alle ruote motrici, introdotti con il termine q/u , caratterizza, in modo sensibile, l'analisi dinamica condotta.

Capitolo 6

Conclusioni

Dall'analisi condotta sul veicolo con differenziale bloccato, è emerso chiaramente, che il comportamento dinamico quest'ultimo assume delle caratteristiche, che lo rendono molto più complesso, e per certi aspetti unico, rispetto a quello dei normali veicoli dotati di differenziale. Una delle principali cause, è, senza dubbio, la nascita di un nuovo contributo al momento d'imbardata, indicato con M_{z_2} , che ha origine dalla differenza tra le forze longitudinali, scambiate a terra dai pneumatici, a seguito del bloccaggio del differenziale.

L'analisi svolta è caratterizzata, inoltre, dall'aver considerato la presenza di piccoli slittamenti alle ruote posteriori motrici, attraverso l'introduzione del termine q/u . Quest'ultimo, oltre ad influenzare la definizione dello scorrimento teorico delle ruote, relative all'assale posteriore, caratterizza l'intero sistema dinamico a regime, il quale risulta *non lineare* indipendentemente dal tipo di pneumatico utilizzato.

Un'importante considerazione è emersa, durante lo svolgimento dell'analisi, in merito allo scorrimento teorico σ_{ij} ; infatti, si nota quanto sia più corretto, non solo da un punto di vista concettuale, considerare quest'ultima, e non l'angolo di deriva α_{ij} , come grandezza di riferimento per l'analisi dinamica del modello; basti pensare che a differenza di α_{ij} , lo scorrimento teorico, oltre a tener conto della velocità angolare della ruota, caratterizza il moto del punto di contatto con la strada, permettendo, insieme

al trasferimento di carico di definire compiutamente le forze a terra di ciascun pneumatico.

L'intera analisi del comportamento dinamico del veicolo, è stata suddivisa in due parti, caratterizzate ciascuna da un diverso tipo di equazione costitutiva. Nella prima parte ci siamo avvalsi di un pneumatico *lineare*, ovvero descritto da un'equazione, in cui vi fosse un rapporto di linearità tra le forze scambiate e lo scorrimento, mentre nella seconda parte l'equazione utilizzata per caratterizzare il comportamento del pneumatico è stata di tipo *non lineare* (modellata attraverso l'uso della Magic Formula di Pacejka). Ciò che è emerso immediatamente, dalla prima delle due analisi, è stato che, il fatto di considerare anche piccoli slittamenti alle ruote, e quindi l'introduzione del termine q/u , trasforma, il sistema dinamico a regime, in un sistema non lineare, nonostante la linearità dell'equazione costitutiva. Questo porta inevitabilmente a delle conseguenze, deducibili, soprattutto, dagli andamenti delle grandezze caratteristiche della dinamica, ottenute sottoponendo il veicolo alle tre manovre classiche $u = cost$, $\delta = cost$ ed $R = cost$. Basti pensare che, l'handling diagram è rappresentato da curve non lineari, ed in particolare, nelle prove a $u = cost$, la non linearità tende ad essere più accentuata, all'aumentare del valore della velocità di prova.

Un'ulteriore conseguenza dell'introduzione del termine q/u e della nascita del nuovo contributo al momento d'imbardata, è il fatto che solamente le curve dell'handling diagram, relative alla manovra ad $u = cost$, passano per l'origine del sistema di riferimento, diversamente da quello che accadeva nella *teoria classica*. Tutto ciò rimanda, inevitabilmente, ad un'altra considerazione, vale a dire che il gradiente di sottosterzo K , che nella teoria classica serviva per indicare il comportamento *generale* del veicolo, in quanto funzione della sola accelerazione laterale a regime, dipende, adesso, anche dal parametro di manovra caratterizzante la prova condotta. Inevitabilmente assisteremo, quindi, ad una perdita d'importanza del gradiente di sottosterzo, come indicatore del comportamento dinamico del veicolo.

Un'ultima considerazione può essere fatta, osservando l'andamento assunto dal grafico

relativo al nuovo termine del momento d'imbardata M_{z_2} . Quello che emerge è proprio la tendenza di quest'ultimo a passare da valori negativi, ottenuti per accelerazioni laterali medio-basse, a valori positivi, raggiunti ad accelerazioni elevate. Tale andamento è indicativo del fatto che M_{z_2} , per valori di \tilde{a}_y medio-bassi, tende ad opporsi all'azione del momento indotto dalle forze laterali agenti sulle ruote, ostacolando, di fatto, la curvatura del veicolo, mentre, per elevati valori dell'accelerazione laterale a regime, cambia segno, favorendo, questa volta, l'azione delle forze laterali, e facendo tendere il veicolo ad un comportamento sovrasterzante.

Per quanto concerne l'analisi condotta con pneumatici non lineari, possiamo dire che abbiamo dovuto risolvere un sistema dinamico a regime, caratterizzato da una doppia non linearità, la prima introdotta insieme al termine q/u , mentre la seconda derivante dalle equazioni costitutive del pneumatico. Ciò ha causato qualche problema numerico, soprattutto nella risoluzione del sistema per le prova ad $R = cost$ dove, per poter condurre l'analisi, occorreva far variare contemporaneamente due parametri, vale a dire la velocità longitudinale del veicolo e l'angolo di sterzo. Nonostante tutto, avvalendoci delle altre due manovre, siamo riusciti, ugualmente a ricavare i valori delle principali grandezze, che hanno consentito di costruire, per punti, le curve caratteristiche della dinamica del veicolo. Sulla base dell'osservazione di quest'ultime si posso trarre considerazioni analoghe rispetto a quelle ottenute nel caso precedente; infatti il contributo al momento d'imbardata M_{z_2} presenta il solito andamento passando, progressivamente da valori negativi a quelli positivi, mentre per quanto riguarda l'handling diagram, possiamo dire che, solamente le curve relative alla manovra eseguita ad $u = cost$ passano per l'origine del sistema di riferimento, richiedendo una nuova definizione del gradiente di sottosterzo.

Oltre a queste, però, si nota un andamento nuovo dell'handling diagram, il quale presenta delle irregolarità alle alte accelerazioni. Ciò deriva dagli andamenti assunti dai diversi contributi al momento d'imbardata, ma in modo particolare deriva dall'introduzione del termine q/u il quale caratterizza le espressioni di quest'ultimi. Infatti,

quanto detto, si evidenzia in modo particolare analizzando le curve ottenute non considerando gli slittamenti alle ruote motrici ($q/u = 0$). Per questa ragione possiamo dire che l'introduzione, nell'analisi, di piccoli slittamenti longitudinali alle ruote motrici, influenza in modo sostanziale l'analisi dinamica svolta.

Una considerazione che è possibile evincere solo analizzando il comportamento dinamico del veicolo con pneumatici non lineari, riguarda gli andamenti delle forze a terra in condizioni di bassa velocità longitudinale e di conseguenza di bassa accelerazione laterale. Infatti dai grafici che esprimono l'andamento delle forze in funzione dello scorrimento corrispondente, si osservano delle curve che si distaccano dal normale andamento. Quello che apparentemente potrebbe sembrare un errore è, in realtà, l'andamento che le forze a terra, soprattutto, laterali, devono assumere per garantire l'equilibrio dell'intero veicolo, perturbato dall'azione del nuovo contributo M_{z_2} , dapprima discorde alla curvatura, ed in seguito concorde. Infatti l'azione di quest'ultimo sarà più efficace alle basse velocità (come mostrato nelle prove ad $u = \text{cost}$), dove, riuscendo a modificare sensibilmente l'handling diagram, tenderebbe a far passare il comportamento del veicolo da sottosterzante a sovrasterzante. Aumentando però l'accelerazione, o più semplicemente la velocità di prova, si osserva che l'azione di M_{z_2} si affievolisce facendo assumere al veicolo un carattere decisamente sottosterzante.

In generale, quindi, possiamo concludere che un veicolo con differenziale bloccato ha un comportamento diverso e più complesso rispetto a quello dei normali veicoli, essendo caratterizzato dalla nascita del nuovo termine del momento d'imbardata. Inoltre l'aver considerato, anche, la presenza di piccoli slittamenti alle ruote motrici, introdotti con il termine q/u , caratterizza sensibilmente l'analisi dinamica.

Possiamo sottolineare, infine, che il presente studio potrà essere utilizzato (tenendo ben presenti le ipotesi di fondo), anche, per l'analisi direzionale dei veicoli da competizione, e non, dotati di *differenziale a bloccaggio controllato*, o più semplicemente come base per studi futuri.

Elenco di principali simboli

Alcuni simboli hanno più di un significato.

a_2	semipasso posteriore;
a_n	accelerazione normale;
a_t	accelerazione tangenziale;
a_x	accelerazione longitudinale;
a_y	accelerazione laterale;
\tilde{a}_y	accelerazione laterale a regime;
d	altezza dell'asse di rollio da terra in corrispondenza del baricentro;
d_1	altezza dell'asse di rollio da terra in corrispondenza dell'assale anteriore;
d_2	altezza dell'asse di rollio da terra in corrispondenza dell'assale posteriore;
g	accelerazione di gravità;
h	altezza del baricentro da terra, altezza del centro della ruota;
i,j,k	versori degli assi x, y e z ;
k	$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \Delta F_z} \right _{\Delta F_z=0, \sigma=0}$;
K_ϕ	rigidezza a rollio totale del veicolo;
K_{ϕ_i}	rigidezza a rollio relativa all'assale i-esimo;
l	passo del veicolo;
m	massa del veicolo;

r	velocità d'imbardata, velocità d'imbardata a regime;
t_i	carreggiata relativa all'assale i-esimo;
(u, v, w)	componenti della velocità di G rispetto agli assi corpo;
u	componente longitudinale della velocità del baricentro;
v	componente trasversale della velocità del baricentro;
w	componente normale della velocità del baricentro;
(x, y, z)	sistema di assi corpo (veicolo, ruota);
B	termine di proporzionalità tra il trasferimento di carico e la forza laterale
B, C, D, E	coefficienti della Magic Formula;
C	centro d'istantanea rotazione, traccia dell'asse elicoidale;
C_x	coefficiente di resistenza aerodinamica;
C_{xij}^0	rigidezza di deriva longitudinale per la ruota j-esima dell'assale i-esimo;
C_{yij}^0	rigidezza di deriva trasversale per la ruota j-esima dell'assale i-esimo
\mathbf{F}	forza generica di modulo F e componenti F_x, F_y e F_z ;
F_a	forza aerodinamica;
\mathbf{F}_t	forza tangenziale tra strada e pneumatico;
\mathbf{F}_x	forza longitudinale tra strada e pneumatico;
\mathbf{F}_y	forza laterale tra strada e pneumatico;
\mathbf{F}_z	forza verticale tra strada e pneumatico;
G	baricentro;
J	momento o prodotto d'inerzia;
K	gradiente di sottosterzo;
K_g	gradiente di sottosterzo generalizzato;
T	coppia motrice;
\mathbf{V}	velocità generica di modulo V ;
V	modulo di \mathbf{V} ;
\mathbf{V}_g	velocità del baricentro del veicolo;
\mathbf{V}_s	velocità di scorrimento;

\mathbf{V}_r	velocità di rotolamento;
α	angolo di deriva del pneumatico, angolo di deriva del pneumatico a regime;
α_1	angolo di deriva dell'assale anteriore;
α_2	angolo di deriva dell'assale posteriore;
β	angolo di assetto del veicolo;
δ	angolo di sterzo;
δ_0	angolo di Ackermann = l/R ;
μ	coefficiente di aderenza;
ρ	densità dell'aria;
σ	scorrimento teorico della ruota con pneumatico;
σ	modulo di σ ;
Ω	velocità angolare;
Ω	vettore velocità angolare;
Ω_0	velocità angolare della ruota folle;
Ω_0^α	velocità angolare della ruota in deriva pura;

Bibliografia

- [1] Bencini M. (1956), *Dinamica del veicolo*, Libreria Editrice Politecnica, Milano.
- [2] Bernard J.E. e Clover C.L. (1995), “ Tire modeling for low-speed and high-speed calculations ”, *SAE Transactions*, paper n. 950311, 474-483.
- [3] Ellis J.R. (1994), *Vehicle Handling Dynamics*, Mechanical Engineering Publications (MEP), Londra.
- [4] Genta G. (1993), *Meccanica dell'autoveicolo*, Levrotto & Bella, Torino.
- [5] Gim G. e Nikraves P.E. (1990, 1991), “ An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulation ”, *Int. J. of Vehicle Design*, in 3 parti, **11**,589-618, **12**, 19-39,217-228.
- [6] Guiggiani M, *Dinamica del veicolo*(1998), Città Studi Edizioni, Torino.
- [7] Pacejka H.B. (1998), *Modelling of the pneumatic tyre and its impact on vehicle dynamic behaviour*, Report i72B (2 vol.), Technical University of Delft.
- [8] Pacejka H.B. (1986), “ Lateral stability of road vehicles ”, international Center for transportation studies (ICTS), *Proc. of the Third Course on Advanced Vehicle Dynamics*, Amalfi, 75-120.
- [9] Pacejka H.B. ed., (1992), *Tyre models for Vehicle Dynamics Analysis*, suppl. a *Vehicle System Dynamics*,**21**.

- [10] Pacejka H.B. (1996), “ The tyre as a vehicle component ”, FISITA B0601, Praga.